1. Funkcja losowa $X=(X_t)_{t\in T}$, gdzie $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – przestrzeń probabilistyczna, (E,B) – przestrzeń mierzalna, E – przestrzeń stanów $T\neq\emptyset$ – dowolny zbiór, X_t – zmienna losowa o wartościach wE.
2. Proces stochastyczny Zwykle funkcja losowa o wartościach w $E=\mathbb{R}$. Czasem $T=\mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{Z}_+$ lub przedział w $\mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{Z}_+$ – proces stochastyczny o wartościach w E. Czasem $T=\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ (interpretowane jako czas). Proces X jest: d-wymiarowy, gdy $E=\mathbb{R}^d$; dyskretny, gdy $T\subset\mathbb{Z}_+$; ciągły, gdy $T\subset\mathbb{R}_+$. Oznaczenie: $X_t(\omega)=X(t,\omega)$, $X_t=X(t)$.
3. Trajektoria (ścieżka) $\forall\omega\in\Omega$ funkcja $t\mapsto X_t(\omega)$, $T\to E$.
4. Fakt Jeśli $X=(X_t)_{t\in T}$ jest procesem ciągłym i E jest przestrzenią metryczną, trajektorie są ciągłe, wówczas X jest ciągły (prawo/lewostronnie).
5. Nierozróżnialność Funkcje losowe $X=(X_t)_{t\in T}$, $Y=(Y_t)_{t\in T}$ są nierozróżnialne, jeśli $\mathbb{P}(\exists_{t\in T}X_t\neq Y_t)=0$.
6. Niezależne przyrosty Proces $X=(X_t)_{t\in T}$ (o wartościach w E) ma niezależne przyrosty, jeśli $\forall_{0\leqslant t_0<\ldots<t_n,t_j\in T}X_{t_0},X_{t_1}-X_{t_0},\ldots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ są niezależne, gdzie $E=\mathbb{R}^d$, $T=\mathbb{R}_+$ lub przedział.
7. Proces Wienera (ruch Browna) [PW] Proces $W=(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ spełniający: $W_0=0$, ma niezależne przyrosty, $s<t$, $W_t-W_s\sim N(0,t-s)$, ciągłe trajektorie
8. d-wymiarowy proces Wienera Proces $W=(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ o wartościach w $\mathbb{R}^d$, gdy $W=(W^{(1)}\ldots,W^{(d)})$, $W^{(1)},\ldots,W^{(d)}$ są niezależnymi procesami Wienera.
9. Fakt Proces $W=(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ o wartościach w $\mathbb{R}^d$ jest d-wymiarowym [PW] wtedy i tylko wtedy gdy: $W_0=0$, ma niezależne przyrosty, $s<t$, W_t-W_s ma rozkład normalny ze średnią zero i macierzą kowariancji diagonalną z $t-s$ na przekątnej. jest ciągły
10. Lemat Jeśli $X=(X_t)_{t\in T}$ jest ciągłym procesem z własnością $\forall_{t_1<\ldots<t_n}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\sim(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})$, gdzie W jest [PW], to X jest [PW].
11. Wniosek Jeśli W jest [PW], to $\forall_{t_1<\ldots<t_n}(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})$ ma rozkład normalny.
12. Proces gaussowski $X=(X_t)_{t\in T}$ o wartościach w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^d$, gdy $\forall_{t_1<\ldots<t_n}(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})$ jest gaussowski.
13. Uwaga Rozkład $(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})$ jest określony przez wartość oczekiwaną 0 oraz macierz kowariancji, taką że $\mathbb{E}(W_tW_s)=s\wedge t$.
14. Twierdzenie Ciągły proces $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest [PW] wtw. gdy jest gaussowski, $\mathbb{E}X_t=0$, $Cov(X_t,X_s)=t\wedge s$.
15. Fakt Niech $W=(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ [PW], ustalmy $0\leqslant s<t$. Rozważmy ciąg podziałów $[s,t]$ taki że $s=t_0^n<t_1^n<\ldots,t_{m_n}^n=t$, $\max_k(t_{k+1}^n-t_k^n)\longrightarrow_{n\to\infty}0$. Wówczas $\sum_{k=1}^{m_n}(W_{t_k^n}-W_{t_{k-1}^n})\longrightarrow_{n\to\infty}t-s$ w $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.
16. σ-algebra, cylindry Niech $X=(X_t)_{t\in T}$, X – przestrzeń funkcji $T\to E$ zawierających wszystkie trajektorie X. Definiujemy σ-algebrę podzbiorów X generowaną przez cylindry: $\sigma(C)=\sigma(\{x\in X: x(t)\in B\}, t\in T, B\in B\}$, gdzie C – zbiór wszystkich cylindrów.
17. Stwierdzenie Jeśli $X=(X_t)_{t\in T}$ – proces (funkcja losowa) w E o trajektoriach w X, to istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna μ_X na $\sigma(C)$, taka że $\forall_{\Gamma\in\sigma(C)}\mathbb{P}(X.\in\Gamma)=\mu_X(\Gamma)$ (gdzie μ_X – rozkład procesu X).
18. Uwaga(na odwrót) Mamy X – przestrzeń funkcji $T\to E$, C i na $\sigma(C)$ – miarę probabilistyczną μ. Definiujemy $\Omega=X$, $\mathcal{F}=\sigma(C)$, $P=\mu$, $x\in X$, $X_t(x)=x(t)$. Wtedy $X=(X_t)_{t\in T}$ jest funkcją losową o rozkładzie μ.
19. Rozkład skończenie wymiarowy funkcji losowej X Mamy funkcję losową lub $X=(X_t)_{t\in T}$ w E. $\forall_{n\geqslant1}\forall_{t_1,\ldots,t_n\in T}$. Miara probabilistyczna na $E\times\ldots\times E\to\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B)=P((X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\in B)\leftarrow$ rozkład skończenie wymiarowy procesu X, $B\in\mathcal{B}^{\otimes n}$.
20. Stwierdzenie Rozkłady skończenie wymiarowe wyznaczają rozkład procesu (funkcji losowej) X w danej przestrzeni trajektorii X.
21. Warunki zgodności Kołmogorowa Własności rodziny rozkładów skończenie wymiarowych danej funkcji losowej $X=(X_t)_{t\in T}$:
    (a) $\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1\times\ldots\times B_n)=\mu_{t_{\pi_1},\ldots,t_{\pi_n}}(B_{\pi_1}\times\ldots\times B_{\pi_n})$
    (b) $\mu_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(B_1\times\ldots B_n\times E)=\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B_1\times\ldots\times B_n)$
22. Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu Niech T – dowolny zbiór $\neq\emptyset$. E – przestrzeń polska (metryczna, zupełna, ośrodkowa; u nas zwykle $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$). Załóżmy, że $\forall_{n\geqslant1}\forall_{t_1,\ldots,t_n\in T}$ mamy miarę probabilistyczną $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ na $B^{\otimes n}$, takie że spełnione są warunki zgodności. Wówczas istnieje $(\Omega,\mathcal{F},P)$ i funkcja losowa $X=(X_t)_{t\in T}$ taka że ma takie rozkłady skończenie wymiarowe.
23. Wniosek Istnieje proces $(X_t)_{t\in R\mathbb{R}_+}$ o rozkładach skończenie wymiarowych takich jak [PW].
24. Równoważność procesów stochastycznych
    (a) nieodróżnialność
    (b) równoważność w sensie rozkładów – gdy procesy $X=(X_t)_{t\in T}$ i $Y=(Y_t)_{t\in T}$ mają te same rozkłady skończenie wymiarowe
    (c) równoważość w sensie modyfikacji – procesy X, Y w tej samej przestrzeni $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – Y jest modyfikacją X, jeśli $\forall_{t\in T}\mathbb{P}(X_t\neq Y_t)=0$.

    Mamy implikacje $(a)\Rightarrow(c)\Rightarrow(b)$.
25. Stwierdzenie X jest modyfikacją Y i X, Y są (prawo/lewostronnie) ciagłe to X i Y są nieodróżnialne.
26. Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu modyfikacji ciągłej $(X_t)_{t\in[a,b]}$ – proces (rzeczywisty), taki że istnieją stałe K, ε, $\beta>0$. $\forall_{t,s\in[a,b]}\mathbb{E}|X_t-X_s|^\beta\leqslant K|t-s|^{1+\varepsilon}$. Wówczas $(X_t)_t$ ma modyfikację ciągłą, co więcej ta modyfikacja ma trajektorie spełniające warunek Höldera z każdym wykładnikiem $\alpha<\frac{\varepsilon}{\beta}$.
27. Wniosek To samo twierdzenie zachodzi, gdy $T=\mathbb{R}_+$ i założenie jest dla $|t-s|\leqslant r$. Wtedy istnieje modyfikacja ciągła, spełniająca lokalnie warunek Höldera (na przedziałach skończonych).
28. Wniosek Proces Wienera istnieje.
29. Filtracja Bierzemy T – przedział ograniczony lub nie w $\mathbb{Z}_+$ lub $\mathbb{R}_+$, $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Filtracja to rodzina σ ciał $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$, taka że $t_1\leqslant t_2$, to $\mathcal{F}_{t_1}\subset\mathcal{F}_{t_2}$
30. Uzupełnienie filtracji Jeśli mamy jakąś filtrację, to $(\overline{\mathcal{F}_t})_{t\in T}$ – uzupełnienie filtracji tzn. $\overline{\mathcal{F}_t}$ zawiera wszystkie zdarzenia z $\mathcal{F}_t$ i wszystkie podzbiory zdarzeń o prawdopodobieństwo 0 z $\mathcal{F}$. Po uzupełnieniu $\mathcal{F}$, $(\overline{\mathcal{F}_t})_t$ jest filtracją.
31. Filtracja prawostronnie ciągła T – ciągły, $\mathcal{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$, $(\mathcal{F}_{t+})_+$ – filtracja. Mówimy, że $(\mathcal{F}_t)_t$ jest prawostronnie ciągła, gdy $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$. $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$ jest prawostronnnie ciągła.
32. Moment zatrzymania Funkcję $\tau:\Omega\to T\cup\{\infty\}$ nazywamy momentem zatrzymania względem ustalonej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, gdy $\forall t\in T\{\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t$.
33. Stwierdzenie $(X_t)_{t\in T}$ o wartościach w $\mathbb{R}^d$ prawostronnie ciągły i $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – filtracja taka że $\forall_t$ X_t jest $\mathcal{F}_t$ – mierzalne. Wówczas $\forall_{B\subset\mathbb{R}^d}$ otwartego, τ_B jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$.
34. Proces adaptowany $(X_t)_t$ – proces taki że X_t jest $\mathcal{F}_t$ mierzalny (gdzie $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – filtracja).
35. Lemat Jeśli $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest filtracją prawostronnie ciągłą, to τ jest momentem zatrzymania względem tej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ wtw. gdy $\forall_{t\in T,t>0}\{\tau<t\}\in\mathcal{F}_t$.
36. Stwierdzenie Niech $(X_t)_{t\in T}$ będzie procesem w $\mathbb{R}^d$, ciągłym, adaptowanym do filtracji $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in T}$. $\forall_{B\in\subset\mathbb{R}^d}$ domkniętego, τ_B jest momentem zatrzymania.
37. Własności momentów zatrzymania Niech τ_1, τ_2 – momenty zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, $T=\mathbb{R}_+$: τ_1+t, $\tau_1\wedge\tau_2$, $\tau_1\vee\tau_2$ są momentami zatrzymania.
38. Moment zatrzymania τ – moment zatrzymania względem pewnej filtracji.$\mathcal{F}_\tau$: $A\in\mathcal{F}_\tau$=$\{A\in\mathcal{F}$ i $\forall_{t\in T}$ $A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t\}$.
39. Własności
    - $\mathcal{F}_\tau$ – σ-ciało
    - $\tau\equiv t\Rightarrow\mathcal{F}_\tau=\mathcal{F}_t$.
    - τ – co najwyżej przeliczalna liczba wartości, to $A\in\mathcal{F}_\tau\Leftrightarrow A\in\mathcal{F}$ i $\forall_{t\in\text{zb. wartości }\tau}A\cap\{\tau=t\}\in\mathcal{F}_t$
    - $\tau_1\leqslant\tau_2\Rightarrow\mathcal{F}_{\tau_1}<\mathcal{F}_{\tau_2}$.

40. PROCES PROGRESYWNIE MIERZALNY WZGLĘDEM FILTRACJI $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ $X=(X_t)_{t\in T}$ w $\mathbb{R}^d$ (T – ciągły), jeśli $\forall_{t\in T}\forall_{B\in B(\mathbb{R}^d)}$ $\{(s,\omega): s\leqslant t,\ X_s(\omega\in B\}\in B([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$. Progresywna mierzalność $X\Rightarrow X$ jest adaptowany.
41. STWIERDZENIE Jeśli X jest procesem progresywnie mierzalnym i τ momentem zatrzymania, to X_τ jest $\mathcal{F}_\tau$ jest mierzalny na zbiorze $\omega_\tau=\{\tau<\infty\}\in\mathcal{F}_\tau$.
42. MARTYNGAŁ (NAD-, POD-) $T\subset R$, $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, $(X_T,\mathcal{F}_t)$ jest martyngałem (nad-, pod-), jeśli $(X_t)_t$ jest adaptowany do filtracji $\forall t\in T$, $\mathbb{E}|X_t|<\infty$, $\forall_{s\leqslant t,s,t\in T}\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)=X_s$ p.n. ($\leqslant,\geqslant$). X jest podmartyngałem $\Leftrightarrow -X$ jest nadmartyngałem.
43. WNIOSEK PW $(W_t,\mathcal{F}^w_t)_t$ jest martyngałem.
44. STWIERDZENIE $(X_t,\mathcal{F}_x)_{t\in T}$, gdzie T – przedział skończony (lub nie) w $\mathbb{Z}_+$ lub $\mathbb{R}_+$, X – martyngał; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – wypukła, $\forall_{t\in T}\mathbb{E}|f(X_t)|<\infty$. Wówczas $(f(X_t),\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest podmartyngałem.
45. TWIERDZENIE DOOBA (PRZYPADEK DYSKRETNY) Optional sampling theorem Jeśli mamy $(X_t,\mathcal{F}_t)_t$ nadmartyngał (martyngał), τ_1, τ_2 – momenty zatrzymania wzglem tej filtracji, takie że $\tau_1\leqslant\tau_2$ i τ_1, τ_2 przyjmują tylko skończoną liczbę wartości należących do T. Wtedy: $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1})\leqslant X_{\tau_1}$ p.n. (= dla martyngału).
46. MARTYNGAŁ (NAD-) PRAWOSTRONNIE DOMKNIĘTY
    (i) Martyngał (nad-) $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, jeśli $T=[0,a]$, gdzie $a\leqslant\infty$ (tzn. $\mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{Z}_+$). Martyngał ma wtedy postać $X_t=\mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ (nad- $\geqslant$, pod- $\leqslant$).
    (ii) Martyngał (nad-) $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\in[0,a]}$, jeśi istnieje $\forall_{t<a}\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_a\subset\mathcal{F}_i$. X_a jest $\mathcal{F}_a$ – mierzalne, $\mathcal{E}|X_a|<\infty$, takie że $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\leqslant a}$ martyngał (nad-).
47. UOGÓLNIONE TWIERDZENIE DOOBA (CZAS DYSKRETNY) $(X_n,\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ – martyngał (nad-) prawostronnie domknięty (w sensie (ii)) $\Rightarrow\forall_{\tau_1,\tau_2-\text{ m.z.}}\tau_1\leqslant\tau_2\Rightarrow\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1})=X_{\tau_1}$.
48. NIERÓWNOŚCI MAKSYMALNE
    (i) T – przedział w $\mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{Z}_+$, $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – nad- albo podmartyngał, nieujeme. Wtedy $\forall_{\alpha>0}\mathbb{P}(\sup_{t\in T}X_t\geqslant\alpha)\leqslant\frac{1}{\alpha}\sup_t\mathbb{E}X_t$.
    (ii) $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ – martyngał prawostronnie ciągły (gdy czas ciągły) $\forall_{\alpha>0}\mathbb{P}(\sup_t|X_t|\geqslant\alpha)\leqslant\frac{\sup_t\mathbb{E}|X_t|}{\alpha}$.
49. NIERÓWNOŚĆ DOOBA DLA MARTYNGAŁÓW W L^p $T=\mathbb{Z}_+$ lub $\mathbb{R}_+$ (przedział też może być), $(X_t,\mathcal{F}_t)_t$ to martyngał, prawostronnie ciągły (w przypadku czasu ciągłego), $p>1$, $X_t\in L^p$, $\forall_t$. Wówczas: $||\sup_t||X_t|||_p\leqslant\frac{p}{p-1}\sup_t|X_t||_p$, gdzie $||X||_p=(\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}$.
50. TWIERDZENIE O ZBIEŻNOŚCI NADMARTYNGAŁÓW P.N. $T=\mathbb{Z}_+$ lub $\mathbb{R}_+$, $(X_t,\mathcal{F}_t)_T$ – nadmartyngał, taki że $\sup_t\mathbb{E}X_t^-<\infty$ $(a^-=(-a)\vee 0)$, prawostronnie ciągły (gdy czas ciągły). Wówczas $\lim_{t\to\infty}X_t$ istnieje p.n. i jest zmienną losową całkowalną (o skończonej $\mathbb{E}$).
51. WNIOSEK Jeśli $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest nadmartyngałem prawostronnie ciągłym, to z prawdopodobieństwem 1 trajetkorie mają skończone granice lewostronne.
52. WNIOSEK $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – martyngał prawostronnie ciągły i $p>1$, że $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}$ tzn. $X_t=\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)$ przy czym $\mathbb{E}|X_\infty|^p<\infty$ i $X_t\longrightarrow_{t\to\infty}X_\infty$ p.n. i w L^p.
53. MARTYNGAŁY Z CZASEM DYSRETNYM „ODWRÓCONYM" $T=\{\dots,-2,-1,0\}\dots\subset\mathcal{F}_{-2}\subset\mathcal{F}_{-1}\subset\mathcal{F}_0$, n_1, n_2, $n_1>n_2$. Wówczas $\mathbb{E}(X_{n_1}|\mathcal{F}_{n_2})\leqslant X_{n_1}$ dla nadmartyngału (= dla martyngału).
54. TWIERDZENIE $(X_t,\mathcal{F}_n)_{n=0,-1,-2,\dots}$ – martyngał (nadmartyngał), przy czym $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}X_n<\infty$ (zawsze spełnione dla martyngału). Wówczas (X_n) jest zbieżny, gdy $n\to\infty$ p.n. i w L^1. Dla martyngału: $\lim_n X_n=\mathbb{E}(X_0|\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n)$.
55. TWIERDZENIE DOOBA (CZAS CIĄGŁY) Optional sampling Niech $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – nadmartyngał (martyngał) prawostronnie ciągły:
    (i) $\forall_{\tau_1,\tau_2\text{ –m.z. ograniczonych}}$, $\tau_1\leqslant\tau_2$ mamy $\mathbb{E}(X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1})\leqslant X_{\tau_1}$ p.n. (= dla martyngałów).
    (ii) Jeśli $(X_t,\mathcal{F}_t)_t$ jest prawostronnie domknięty, to ta własność zachodzi $\forall_{\tau_1,\tau_2\text{ m.z.}}$ $\tau_1\leqslant\tau_2$. Dla martyngału mamy $X_\tau=\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\tau)$ $\forall_{\tau\text{ m.z.}}$
56. PRZYPOMNIENIE ξ – zmienna losowa o rozkładzie μ i dystrybuancie F, f – funkcja rzeczywista, $\mathbb{E}f(\xi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mu dx$ (często oznaczana jako $\int f(x)dF(x)$).
57. STWIERDZENIE Ustalmy przedział $[a,b]$ (skończony), weźmy funkcję h prawostronnie ciągłą, niemalejącą. Istnieje dokładnie jedna miara skończona μ_h na $\mathcal{B}((a,b])$, że $\forall_{t\in(a,b]}$ $\mu_h((0,t])=h(t)-h(a)$.
58. CAŁKA LEBESGUE'A-STIELTJESA Całka $\int_a^b f(u)\mu_h(du)$, oznaczana $\int_a^b f(u)dh(u)=\int fdh$. Dla $h(t)\equiv t$ – całka Lebesgue'a.
59. WŁASNOŚCI CAŁKI STIELTJESA
    (i) $\int_a^b 1\perp_{(u,v]}dh=h(v)-h(u)=\int_v^u 1dh$ (tzn. $\int_{(u,v]}1dh$, $a\leqslant u\leqslant v\leqslant b$
    (ii) $f\mapsto\int fdh$ – liniowa
    (iii) $\int fd(h_1+h_2)=\int fdh_1+\int fdh_2$
60. UOGÓLNIONA DEFINICJA h_1, h_2 – prawostronnie ciągłe, niemalejące $\int_0^t fd(h_1-h_2)=^{def.}\int fdh_1-\int fdh_2$.
61. WAHANIE FUNKCJI Na przedziale $(a,b]$: $\sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b}\sum_{k=0}^{m-1}|h(t_{k+1})-h(t_k)|=^{ozn.}|h|_{(a,b]}$. Oznaczenia: $|h|_{(a,t)}=|h|(t)$ $V_{[a,b]}$ – funkcje prawostronnie ciągłe na $[a,b]$ o wahaniu skończonym. np. h spełniające warunek Lipschitza (w szczególności każda funkcja klasy C^1), $h=h_1-h_2$, h_1, h_2 – monotoniczne, prawostronnie ciągłe.
62. WŁASNOŚCI WAHANIA $|h|_{(a,b]\cup(b,c]}=|h|_{(a,b]}+|h|_{(b,c]}$, $|h|(\cdot)$ – niemalejąca, $|h|(\cdot)$ – prawostronnie ciągła (ciągła, jeśli h ciągłe)
63. TWIERDZENIE $h\in V_{[a,b]}\Rightarrow\exists h_1,h_2$ – funkcje niemalejące, prawostronnie ciągłe lub ciągłe, jeśli h ciągłe takie że $h_1(a)=h_2(a)=0$, $h(t)=h(a)+h_1(t)-h_2(t)$ $h_1=\frac{|h|+h-h(a)}{2}$, $h_2=\frac{|h|-h+h(a)}{2}$.
64. WNIOSEK f ograniczona, lewostronnie (lub prawostronnie) ciągła $a=t_{0n}<t_{1n}<\ldots<t_{m_n n}=b$, średnica$\to 0$, $h\in V_{[a,b]}$. Wówczas suma Riemanna Stieltjesa $\sum_{k=1}^{m_n}f(\tilde{t}_{k_n})(h(t_{k,n})-h(t_{k-1,n}))\to_{n\to\infty}\int_a^b fdh$, gdzie
$$\tilde{t}_{k,n}=\begin{cases}t_{k-1,n} & \text{gdy f prawostronnie ciągła}\\ t_{k,n} & \text{gdy f lewostronnie ciągła}\\ \in[t_{k-1,n},t_{k,n}] & \text{gdy f ciągła}\end{cases}$$
65. WNIOSEK $h\in V_{[a,b]}$, f – mierzalna, ograniczona, g – h-całkowalna (całkowalna względem h). Wówczas $\int_a^{\cdot}gdh\in V_{[a,b]}$ i $\int_a^b fd(\int_a^{\cdot}gdh)=\int_a^b fgdh$.
66. TWIERDZENIE Istnieje $A\in\mathcal{B}[a,b]$ taki że $\mu_{h_1}(A)=\mu_{h_1}(]a,b])=h_1(b)$, $\mu_{h_2}(A)=0$ (rozłączne nośniki).
67. BIAŁY SZUM (ξ_t) $\frac{dx}{dt}=b(x(t))+\xi_t$, gdzie ξ_t – i.i.d., symetryczne, o nieskończonej wariancji i Gaussa. Szum zależny jest od stanu.
68. NAJPROSTSZE RÓWNANIE STOCHASTYCZNE Jego rozwiązanie jest procesem. $dx=b(x(t))dt+\dot{W}dt\Leftrightarrow x(t)=x_0+\int_0^t b(x(s))dy+W_t$. Formalnie: $dx(t)=b(x(t))dt+\sigma(x(t))dW_t$.
69. CEL Chcemy zdefiniować $\int_0^t x_s dM_s$, gdzie M – pewien ciągły martyngał, x – odpowiedni proces stochastyczny.
70. FAKT Jeśli M – ciągły martyngał ($\neq$ stała), to trajektorie mają wahanie nieskończone na każdym odcinku $[0,t)$.
71. OZNACZENIA $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – zupełna przestrzeń probabilistyczna (dorzucamy wszystkie podzbiory o prawdopodobieństwie zero, są mierzalne) $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ – filtracja spełniająca zwykłe warunki $\mathcal{M}^{2,c}$ – klasa wszystkich ciągłych martyngałów M, takich że $\mathbb{E}M_t^2<\infty$, $\forall_{t\geqslant 0}$ $\mathcal{V}^c$ – ciągłe, adaptowane procesy z trajektorami o wahaniu skończonym w $[0,t]$ $\mathcal{M}^{2,c}$ i $\mathcal{V}^c$ są przestrzeniami liniowymi. Umawiamy się, że $V\in\mathcal{V}^c$ jest rosnący, jeśli trajetkroie są niemalejące.
72. TWIERDZENIE (DOOBA-MEYERA) Jeśli $M\in\mathcal{M}^{2,c}$, to istnieje dokładnie jeden (w sensie nieodróżnialności) proces $<M>=<M,M>\in\mathcal{V}^c$ rosnący, $<M>_0=0$, taki że $M^2-<M>$ jest martyngałem.
73. PROCES DOOBA-MEYERA $<M>$ – zwany też procesem nawiasu skośnego lub procesem kwadratowej wariacji.
74. OZNACZENIE X – dowolny proces, τ – moment zatrzymania względem ustalonej filtracji, X^τ – proces X zatrzymany w chwili τ, tzn. $X_t^\tau=X_{t\wedge\tau}$, np. $<W^\tau>_t=t\wedge\tau$.

75. Fakt $M \in \mathcal{M}^{2,c} \Rightarrow M^\tau \in \mathcal{M}^{2,c}$, $V \in \mathcal{V}^c \Rightarrow V^\tau \in V^c$.

76. Stwierdzenie Jeśli $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, τ – moment zatrzymania, to $< M^\tau > = < M >^\tau$.

77. Definicja $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}$ $< M, N > = \frac{1}{4}(< M + N > - < M - N >)$

78. Stwierdzenie $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}$, $< M, N >$ ma własności:

    (a) $< M, N > \in \mathcal{V}^c$, $< M, N >_0 = 0$

    (b) jest jedynym procesem spełniającym (i), takim że $MN - < M, N >$ jest martyngałem

    (c) jest symetryczny tzn. $< M, N = < N, M >$

    (d) jest dwuliniowy, tzn. dla $a, b \in \mathbb{R} < aM_1 + bM_2, N > = a < M_1, N > +b < M_2, N >$

    (e) $< M^\tau, N > = < M, N^\tau > = < M^\tau, N^\tau > = < M, N >^\tau$, gdzie τ – moment zatrzymania.

79. Twierdzenie (Nierówność Kunity-Watanabe) M, $N \in \mathcal{M}^{2,c}$, X, Y – procesy mierzalne. Wtedy: $\int_0^\infty |X_t Y_t| |d| < M, N > |_t \leqslant \sqrt{\int_0^\infty X_t^2 d < M >_t} \sqrt{\int_0^\infty Y_t^2 d < N >_t}$ p.n. Stąd: $\int_0^\infty X^2 d < M > < \infty$, $\int_0^\infty Y^2 d < N > < \infty \Rightarrow$ proces XY jest całkowalny względem $d < M, N >$.

80. Oznaczenia $0 < T \leqslant \infty$, $\mathcal{M}_T^{2,c}$ – ciągłe martyngały na $[0, T)$ takie że $\sup_{t<T} = \mathbb{E} M_t^2 < \infty$. Wiemy, że jeśli $M \in \mathcal{M}_t^{2,c}$, to istnieje M_T, $\mathcal{F}_T$–mierzalna, taka że $M_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $M_t = \mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_t)$, $t \leqslant T$.

81. Twierdzenie $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $(M, N)^T_{\mathcal{M}_T^{2,c}} = (M, N)_T = \mathbb{E} M_T N_T$. Norma to $||M||_{\mathcal{M}_T^{2,c}} = ||M||_T$.

82. Proces elementarny $X = \xi_0 1 \perp_{\{0\}} + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j 1 \perp_{(t_j, t_{j+1}]}$. gdzie $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_m < \infty$, ξ_0, $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ – zmienne losowe, ograniczone, ξ_0 – $\mathcal{F}_0$ mierzalne, ξ_j – $\mathcal{F}_{t_j}$ – mierzalne, $j = 1, \ldots, m-1$. ϵ – klasa wszystkich procesów elementarnych (liniowa).

83. $J_T(X)_t$ Ustalmy $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ i $T \leqslant \infty$, $X \in \epsilon$ postaci jw., $t \leqslant T$ $J_T(X)_t = \int_0^t X_s dM_s = \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j (M_{t_{j+1} \vee t} - M_{t_j \vee t})$.

84. Stwierdzenie Ww. definicja nie zależy od przedstawienia X, J_T jest liniowe względem $X \in \varepsilon$, $J_T(x) \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ oraz $||J_T(x)||_T^2 = \mathbb{E}(\int_0^T X_s dM_s)^2 = \mathbb{E}\int_0^T X_s^2 d < M >_s$, a także $\mathbb{E}(\int_0^t X_0 dM_s)^2 = \mathbb{E}\int_0^t X_s^2 d < M >_s$, $\forall t < T$.

85. Uwagi Weźmy przestrzeń procesów mierzalnych X, takich że $\mathbb{E}\int_0^T X_s^2 d < M >_s < \infty$ – przestrzeń Hilberta $L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}, \mu_M)$, gdzie $\mu_M(\Gamma) = \mathbb{E}\int_0^T 1 \perp_\Gamma (s, \omega) d < M >_s (\omega)$. Mamy, że $J_T : \epsilon \to \mathcal{M}_T^{2,c}$ jest izometrią liniową, jeśli ϵ rozpatrzymy jako podprzestrzeń tej L^2. J_T rozszerza się jednoznacznie do liniowej izometrii z domknięciem ϵ w $M_T^{2,c}$. Takie domknięcie ma postać $\mathcal{L}_T^2(M) := L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{P}_T, \mu_M) = \{X : X$ – $\mathcal{P}_T$-mierzalny $\mathbb{E}\int 0^T X_s^2 d < M >_s < \infty\}$, gdzie $\mathcal{P}_T \subset \mathcal{B}([0,T) \otimes \mathcal{F})$ jest generowane przez $\{0\} \times A$, $A \in \mathcal{F}_0$ i $(s,t] \times A$, $A \in \mathcal{F}_s$. Oznaczenie: u nas zwykle $M = W$, $\mathcal{L}_T^2(M) = \mathcal{L}_T^2$.

86. Proces prognozowalny Proces $\mathcal{P}_T$-mierzalny, gdzie $\mathcal{P}_T$ to σ-ciało zbiorów prognozowalnych.

87. Uwagi prognozowalny $\Rightarrow$ progresywnie mierzalny, lewostronnie ciągły, adaptowany $\Rightarrow$ prognozowalny, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ mierzalna $\Rightarrow$ prognozowalna

88. Całka stochastyczna (izometryczna) Ito Rozszerzenie $J_T(M)$ na $\mathcal{L}_T^2(M)$, oznaczane $J_T(X)_t = \int_0^t XdM$.

89. Ważne $M \in \mathcal{M}^{2,c}$: $\int_0^t X_t dM_t$, $t \leqslant T \leqslant \infty$
    $\mathcal{L}_T^2(M)$: X – prognozowalny $\mathbb{E}\int_0^T X_s^2 d < M >_s < \infty$.

90. Uwagi

    (a) Z konstrukcji wynika, że $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$, $t < T \Rightarrow 1 \perp_{[0,t]} X \in \mathcal{L}_t^2(M)$ i $\int_0^T 1 \perp_{[0,T]} XdM = \int_0^t XdM$

    (b) $X \in \mathcal{L}_t^2(M)$ $\forall_{t<T}$ to $\int_0^t XdM$ – martyngał całkowalny z kwadratem na $[0,T]$ (w szczególności $\in \mathcal{M}^{2,c}$, gdy $T = \infty$).

91. Twierdzenie (Kunity Watanabe, charakteryzacja całki stochastycznej) $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$. Całka stochastyczna $\int XdM$ jest jedynym elementem $\mathcal{M}_T^{2,c}$, że $\forall_{N \in \mathcal{M}_T^{2,c}}$ $(\int XdM, N)_T = (\mathbb{E}(\int_0^T XdM) N_T) = \mathbb{E}\int_0^T X_t d < M, N >_t$.

92. Wniosek Jeśli mamy M^1, $M^2 \in \mathcal{M}^{2,c}$ (dwa martyngały całkowalne z kwadratem), $X \in \mathcal{L}_T^2(M^1)$, $X \in \mathcal{L}_T^2(M^2)$. Wówczas $\int Xd(M^1 + M^2) = \int XdM^1 + \int XdM^2$. To samo, gdy $X \in \mathcal{L}_t^2(M^1) \cap \mathcal{L}_t^2(M^2)$ $\forall t < T$.

93. Stwierdzenie M, $N \in \mathcal{M}^{2,c}$, $X \in \mathcal{L}_t^2(M)$, $\forall_{t<\infty}$ (ogólniej $\forall_{t<T\leqslant\infty}$). Wówczas $< \int XdM, N > = \int Xd < M, N >$.

94. Wniosek $< \int XdM, \int YdN > = \int XYd < M, N >$. W szczególności $< \int XdM > = \int X^2 d < M >$. Ważne: $< \int XdW >_t = \int_0^t X_s^2 ds$.

95. Wniosek $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $X \in \mathcal{L}_T^2(M)$, $\forall_{T<\infty}$ (lub $\forall_{t<T\leqslant\infty}$, Y – prognozowalny, ograniczony). Wówczas

    (a) $\int XYdM = \int Xd(\int YdM) = \int Yd(\int XdM)$

    (b) τ – moment zatrzymania, $\int 1 \perp_{[0,\tau]} XdM = \int XdM^\tau = (\int XdM)^\tau$ – twierdzenie o zatrzymywaniu całki stochastycznej

96. Twierdzenie (o wariacji kwadratowej martyngału) $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ (lub $M \in \mathcal{M}_t^{2,c}$ $\forall t < T \leqslant infty$). Ustalmy dowolne $t < \infty$. Rozpatrzmy ciąg podziałów $0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{m_n,n} = t$ o średnicy zbiegającej do 0. Zdefiniujmy $V_n(M,t) = \sum_{j=0}^{m_n-1} (M_{t_{j+1},n} - M_{t_j,n})^2$. Wówczas $V_n(M,t) \longrightarrow_{n\to\infty} < M >_t$ w $L^1(\Omega)$.

97. Wniosek M, $N \in \mathcal{M}^{2,c}$, $0 = t_{0n} < \ldots < t_{m,n} = t$ (jak poprzednio). Wówczas $\sum (M_{t_{j+1},n} - M_{t_j,n})(N_{t_{j+1},n} - N_{t_j,n}) \to_{wL^1} < M, N >_t$.

98. $\Lambda_T^2(M)$ Procesy prognozowalne X, takie że $\forall_{t<T}$ $\int_0^t X_s^2 d < M >_s < \infty$ p.n. gdzie $T \leqslant \infty$, $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ (wystarczy $M \in \mathcal{M}_t^{2,c}$ $\forall_{t<T}$).
    $\mathcal{L}_T^2(M) \subset \Lambda_T^2(M)$, $\Lambda_T^2(M)$ – liniowa, $M = W \Rightarrow \Lambda_t^2(W) = \Lambda_T^2$

99. Lemat $X \in \Lambda_T^2(M) \Rightarrow \exists_{\tau_n \text{ m.z. } \tau_n \nearrow T}$ taki że $1 \perp_{(0,\tau_n]} X \in \mathcal{L}_T^2(M)$, $n = 1, 2, \ldots$.

100. Uogólnienie całki stochastycznej $X \in \Lambda_T^2(M)$. Istnieje dokładnie jeden proces L, taki że $\forall_{(\tau_n)_n}$ jak w Lemacie zachodzi: $L^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ i $L^{\tau_n} = \int 1 \perp_{(0,\tau_n]} XdM$. L nazywamy całką stochastyczną (Ito) i oznaczamy $L_t = \int_0^t XdM$.

101. Własności całki stochastycznej

    (a) $\int XdM$ – ciągły, adaptowany, 0 w 0

    (b) $X \in \Lambda_t^2(M) \mapsto \int XdM$ – liniowe

    (c) $M \mapsto \int XdM$ – liniowe

    (d) $(\int XdM)^\tau = \int 1 \perp_{(0,\tau]} XdM = \int XdM^\tau$

    (e) $\exists_{\tau_n \text{ m.z. } \tau_n \nearrow T} (\int XdM)^{\tau_n} \int \mathcal{M}_T^{2,c}$

102. Martyngał lokalny, $\mathcal{M}_{T,loc}^{2,c}$

    (a) Proces N o własności (e) tzn. $\exists_{\tau_n \nearrow T}$ $N^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ nazywamy ciągłym martyngałem lokalnym (lokalnie całkowalny z kwadratem). Klasę takich procesów oznaczamy $\mathcal{M}_{T,loc}^{2,c}$ ($\mathcal{M}_{loc}^{2,c}$ gdy $T = \infty$).

    (b) Oznaczenie $\mathcal{M}^c$ – ciągłe martyngały. $\mathcal{M}_{loc}^{2,c}$ – procesy M, takie że $\exists_{\tau_n \nearrow \infty}$ (lub ograniczony $\bar{\tau}_n \nearrow T \leqslant \infty$), że $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^c$. Takie procesy (ciągłe nazywamy martyngałami lokalnymi.

    (c) τ_n – ciąg lokalizujący w $\mathcal{M}_T^{2,c}$ (lub $\mathcal{M}^c$).

103. Uwagi

    (a) $M \in \mathcal{M}_{loc}^c$, $M_0 \in L^2(\Omega) \Rightarrow M \in \mathcal{M}_{loc}^{2,c}$.

    (b) martyngały lokalne nie muszą być martyngałami (np. $X_t = e^{W_1^4} 1 \perp_{(1,2]} (t)$)

    (c) $\mathcal{M}_{loc}^c$, $\mathcal{M}_{loc}^{2,c}$ – klasy liniowe, zamknięte ze względu na zatrzymywanie.

104. LEMAT $M \in \mathcal{M}^c_{loc} \cap \mathcal{V}^c \Rightarrow M \equiv M_0$.

105. TWIERDZENIE

   (a) $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc} \Rightarrow$ istnieje taki jeden proces $< M > \in \mathcal{V}^c$, rosnący, 0 w 0, że $M^2 - < M > \in \mathcal{M}^c_{loc}$

   (b) $< M^\tau > = < M >^\tau$

   (c) $\forall_{t>0}\ \forall\ 0 = t_{0,n} < \ldots < t_{m_n,n} = t$ – średnica $\to 0$. Wówczas $V_n(M,t) \to_P < M >_t$ (czyli $< M >$ – wariacja kwadratowa).

106. <M,N> M, $N \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, definiujemy $< M, N > = \frac{1}{4}(< M + N > - < M - N >)$ – jedyny proces $\in \mathcal{V}^c$, 0 w 0, taki że $MN - < M, N > \in \mathcal{M}^c_{loc}$, dwuliniowy. Też mamy:

   - $< \int XdM, \int YdN > = \int XYd < M, N >$ dla M, $N \in \mathcal{M}^{2,c}$, $X \in \Lambda^2(M)$, $Y \in \Lambda^2(N)$
   - M, $N \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc} \Rightarrow \sum(M_{t_{j+1},n} - M_{t_j,n})(N_{t_{j+1},n} - N_{t_j,n}) \to_P < M, N >$.

107. $\Lambda^2(M)$ (LUB OGÓLNIE $\Lambda^2_T(M)$) $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, definiujemy identycznie jak dla $\mathcal{M}^{2,c}$.

108. UWAGA Jeśli X – prognozowalny, którego trajektorie są funkcjami ograniczonymi na każdym $[0,t]$, $t < T$, to $X \in \Lambda^2_T(M)$ $\forall_{M \in \mathcal{M}^{2,c}_{T,loc}}$ (skrót ptol).

109. TWIERDZENIE (WZÓR NA CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI DLA MARTYNGAŁÓ LOKALNYCH) M, $N \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc} \Rightarrow M_tN_t = M_0N_0 + \int MdN + \int NdM + < M, N >_t$. np. $M = W$, $W^2_t = 2\int_0^t W_sdW_s + t$.

110. (CIĄGŁY) SEMIMARTYNGAŁ Proces Z postaci $Z_t = Z_0 + M_t + A_t$, gdzie $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, $A \in \mathcal{V}^c$, $M_0 = A_0 = 0$. $\mathcal{S}^c$ – klasa semimartyngałów.

111. UWAGI rozkład $Z = Z_0 + M + A$ jest jednoznaczny, $\mathcal{S}^c$ jest liniowa, zamknięta na zatrzymywanie, $\tau_n \nearrow \infty$, $Z^{\tau_n} \in \mathcal{S}^c\ \forall_n \Rightarrow Z \in \mathcal{S}^c$

112. PROCES ITO – WAŻNY PRZYKŁAD $Z_t = Z_0 + \int_0^t XdW + \int_0^t Yds$, gdzie $X \in \Lambda^2$, Y – progresywnie mierzalny, całkowalny.

113. CAŁKA WZGLĘDEM SEMIMARTYNGAŁU $\int XdZ = \int XdM + \int XdA \in \mathcal{S}^c$ = (całka stochastyczna $\in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$) + (całka Stieltjesa $\in \mathcal{V}^c$) gdzie $Z \in \mathcal{S}^c$, $Z = Z_0 + M + A$, X – ptol. Liniowe są: $X \mapsto \int XdZ$, $Z \mapsto \int XdZ$

114. TWIERDZENIE O CAŁKOWANIU PRZEZ CZĘŚI DLA SEMIMARTYNGAŁÓW $Z'Z'' = Z'_0Z''_0 + \int Z'dZ'' + \int Z''dZ' + < M, M'' >$ (ten iloczyn też jest semimartyngałem), gdzie Z', $Z'' \in \mathcal{S}^c$, $Z' = Z'_0 + M' + A'$, $Z'' = Z''_0 + M'' + A''$.

115. WZÓR ITO $f(Z_t) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s)d < M >_s$, gdzie $Z + Z_0 + M + A \in \mathcal{S}^c$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^2. W szczególności $f(Z) \in \mathcal{S}^c$.

116. LEMAT (TW. O ZMAJORYZOWANYM PRZEJŚCIU DO GRANICY POD CAŁKĄ STOCHASTYCZNĄ) $Z \in \mathcal{S}^c$, $X^{(n)}$ – procesy prognozowalne, takie że: $X^{(n)}_t(\omega) \to_{n\to\infty} X_t(\omega)$ i $|X^{(n)}_t(\omega)| \leqslant Y_t(\omega)$, Y – ptol. Wówczas: $\int_0^t X^{(n)}_s dZ_s \to_P \int_0^t X_sdZ_s$.

117. UOGÓLNIENIA (DO WZORU ITO)

   (i) Przypadek wielowymiarowy: Niech $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(d)} \in \mathcal{S}^c$, $Z = (Z^{(1)}, \ldots, Z^{(d)})$, $Z^{(j)} = Z^{(j)}_0 + M^{(j)} + A^{(j)}$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – klasy C^2. Wówczas: $f(Z) \in \mathcal{S}^c$ oraz $f(Z_t) = f(Z_0) + \sum_{j=1}^d \int_0^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(Z_s)dZ^{(j)}_s + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(Z_s)d < M^{(j)}, M^{(k)} >$.

   (ii) Można zakładać, że f jest klasy C^2 o wartościach w $\mathbb{C}$.

118. TWIERDZENIE LEVY'EGO Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, $M_0 = 0$, $< M >_t = t$. Wówczas M jest PW.

119. STWIERDZENIE Mamy procesy X, A – adaptowane, ciągłe, 0 w 0 tzn. $X_0 = A_0 = 0$. A jest rosnący (niemalejący), $\lambda \in \mathbb{R}$. Definiujemy $U^{(\lambda)}_t = \exp^{\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2}A_t}$. N.w.s.r.: $X \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ i $< X > = A$, $U^{(\lambda)} \in \mathcal{M}_{loc}\ \forall_{\lambda \in \mathbb{R}}$

120. WNIOSEK Jeśli X – proces ciągły, adaptowany, 0 w 0, taki że $\exp^{\lambda X_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ jest martyngałem lokalnym $\forall_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Wówczas X jest PW.

121. LEMAT Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, $M_0 = 0$, $Z_t = \exp^{M_t - \frac{1}{2}< M >_t}$. $(Z_t)_{t \leqslant T}$ jest martyngałem $\Leftrightarrow \mathbb{E}Z_T = 1$.

122. TWIERDZENIE GIRSANOWA Niech $Y \in \wedge^2_T$, $T < \infty$, $Z_t = \exp^{\int_0^t Y_sdW_s - \frac{1}{2}\int_0^t Y^2_s ds}$. Załóżmy, że $\mathbb{E}Z_T = 1$. Wówczas proces $V_t := W_t - \int_0^t Y_sds$, $t \in [0,T]$ jest PW w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, Q_T)$, gdzie $Q_T(A) = \int_A Z_TdP$. Q_T jest miarą probabilistyczną z założenia.

123. STWIERDZENIE $Y \in \Lambda^2$, Z_t jw., $\mathbb{E}Z_t = 1\ \forall_{t \geqslant 0}$. $\forall_{T>0}$ mamy Q_T – miara probabilistyczna na $\mathcal{F}^W_T$. Wówczas istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna Q na $\mathcal{F}^W_\infty$, że $\forall_{T>0}\forall_{A \in \mathcal{F}_T}\ Q(A) = Q_T(A)$ i co więcej V zdefiniowane j.w. jest PW na $(\Omega, \mathcal{F}^W_\infty, Q)$.

124. UWAGA Q na ogół nie ma gęstości względem P na $\mathcal{F}^W_\infty$ (nie jest absolutnie ciągłe).

125. WNIOSEK (RÓWNOŚĆ WALDA) $\mathbb{E}\exp^{\lambda W_\tau - \frac{\lambda^2}{2}\tau} = 1 \Leftrightarrow Q(\tau < \infty) = 1$.

126. TWIERDZENIE (KRYTERIUM NOWIKOVA) $Y \in \Lambda^2_T$. Jeśli $\mathbb{E}\exp^{\frac{1}{2}\int_0^T Y^2_s ds} < \infty$, to $\mathbb{E}\exp^{\int_0^T Y_sdW_s - \frac{1}{2}\int_0^T Y^2_s ds} = 1$. Jest to najmnocniejszy znany warunek dostateczny, stała $\frac{1}{2}$ jest optymalna. RÓWNANIA STOCHASTYCZNE (RS)

127. WSTĘP Prosty przypadek jednowymiarowy: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)$ b (współczynnik dryfu), σ (współczynnik dyfuzji) – funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozważamy RS o współczynnikach σ, b: $dX_t = b(X)_tdt + \sigma(X_t)dW_t$, $X_0 = \xi$ – $\mathcal{F}_0$-mierzalne. To rozumiemy jako: $X_t = \xi + \int_0^t b(X)_sds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_t$ (proces dyfuzji). Może być tak że $t \in \mathbb{R}_+$, $t \in [0,T]$.

128. ZAŁOŻENIE b, σ spełniają warunek Lipschitza ze stałą K tzn, $|b(x) - b(y)| \leqslant K|x - y|$, $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant K|x - y|$. Stąd wynika, że $|\sigma(x)|$, $|b(x)| \leqslant K\sqrt{1 + x^2}$ ($\leqslant K(1 + |x|)$).

129. TWIERDZENIE O ISTNIENIU I JEDNOZNACZNOŚCI Jeśli rozwiązanie istnieje, to tylko jedno (z dokładnością do nieodróżnialności). Istnienie rozwiązań.

130. UWAGI Można badać równanie ogólniejsze, niejednorodne: $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$.
Jeśli b, σ sa mierzalne i przy ustalonym t spełniają warunek Lipschitza ze stałą niezależną od t, to też istnieje rozwiązanie i jest jednoznaczne.

131. PRZYPADEK WIELOWYMIAROWY To twierdzenie można uogólnić na przypadek wielowymiarowy: $W_t = (W^{(1)}_t, \ldots, W^{(d)}_t)$ – proces Wienera. X_t – proces o wartościach macierzowych $n \times d$ $X \in \mathcal{M}^n_d$, taki że $\int_0^t (X^{i,j}_s)^2 ds < \infty$ p.n. $\forall t$, $X^{i,j} \in \Lambda^2$ $M^i_t = \int_0^t X_sdW_s = \sum_{j=1}^d \int_0^t X^{i,j}_s dW^j_s < M_t > = (< M^i_t, M^j_t >)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} < M_t > = \int_0^t X_sX^T_s ds$ M_t – proces w $\mathbb{R}^n$ $< M_t > \in \mathcal{M}^n_n$

132. TWIERDZENIE $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathcal{M}^n_d$. ξ – zmienna losowa w $\mathbb{R}^n$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą K. Powiemy, że równanie $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ ma jednoznaczne rozwiązanie, takie że $\forall_{T<\infty} \sup_{t<T} \mathbb{E}(X^2_t) < \infty$ (też prawdziwe dla procesów niejednorodnych).

133. TWIERDZENIE NOWIKOWA $T < \infty$, Y – prognozowalny, $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T Y^2_s ds) < \infty$. Wówczas $\mathbb{E}\exp(\int_0^T Y_sdW_s - \frac{1}{2}\int_0^T Y^2_s ds) = 1$.

134. TWIERDZENIE $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, $M_0 = 0$, $< M >_t$ – ściśle rosnący $< M >_\infty = \infty$. Jeśli $\mathbb{E}e^{M_t - \frac{1}{2}< M_t >}$ jest martyngałem.

135. ZWIĄZKI Z RÓWNANIAMI CZĄSTKOWYMI $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ $X(0) = x \in \mathbb{R}^n$, W – Wienera $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $\sigma_{ij} = [\sigma_{ij}I_{ij}] \in \mathcal{M}^m_d$ $X_i(t) = x_i + \int_0^t b_i(X(s))ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(X_s)dW_s(s)$ $f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))\sigma(X(s))dWs + \int_0^t Lf(X_s)ds$ gdzie $Lf = f'b + \frac{1}{2}f''\sigma^2$ Ogólnie: $f(X(t)) = f(X) + \sum_{i,j=1}^m \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(s))\sigma_{ij}(X_s)dW_j(s) + \int_0^t Lf(X_s)ds$ gdzie $Lf = \sum_{i=1}^m b_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $[a_{ij}] = \sigma\sigma^*$, L – operator eliptyczny.