

# Rezonans stochastyczny

Elżbieta Kukła

4 maja 2011

# Artykuły

- **The mechanism of stochastic resonance**, R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1981, Vol. 14
- **Stochastic resonance in an autonomous system with a nonuniform limit cycle**, W. Rappel, S. Strogatz, *Physical Review E*, October 1994, Vol. 50, No. 4
- **Minireview of stochastic resonance**, K. Wiesenfeld, F. Jaramillo, *Chaos*, September 1998, Vol. 8, No. 3

# Artykuły

- **What is stochastic resonance? Definitions, misconceptions, debates, and its relevance to biology**, M. D. McDonnell, D. Abbott, *Computational Biology*, May 2009, Vol. 5, Issue 5
- **Stochastic resonance**, T. Wellens, V. Shatokhin, A. Buchleitner, *Reports on Progress in Physics*, 2004, Vol. 67
- **Theory of stochastic resonance**, B. McNamara, K. Wiesenfeld, *Physical Review A*, 1 May 1989, Vol. 39, No. 9
- **Stochastic resonance on a circle**, K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazelou, C. Dames, F. Moss, *Physical Review Letters*, 4 April 1994, Vol. 72, No. 14

# Szum

Czy obecność szumu może być korzystna?

- szum to ogólne pojęcie, które zazwyczaj opisuje niepożądane zakłócenia lub fluktuacje
- jeśli układ działa idealnie, to szum jest wrogiem
- jeśli nie wszystko jest idealne, to okazuje się, że obecność szumu lub nieprzewidywalnych fluktuacji może prowadzić do pewnych korzyści

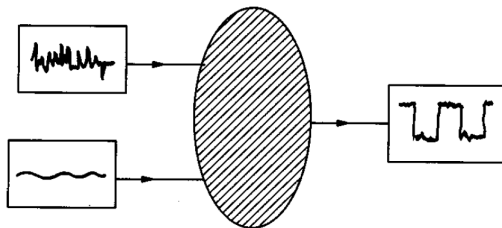
Wyobraźmy sobie układ, na który działają dwa bodźce: pierwszy jest duży i losowy, drugi słaby i okresowy.  
Co dostaniemy w odpowiedzi?

W układzie, w którym zachodzi rezonans stochastyczny możemy dostać sygnał, który jest dość regularny.

# Czym jest rezonans stochastyczny?

## Rezonans stochastyczny

Rezonans stochastyczny to zjawisko występujące w układach dynamicznych, których odpowiedź na zewnętrzny sygnał osiąga wartość optymalną w obecności szumu o pewnym konkretnym natężeniu. Istotna jest nieliniowość układu deterministycznego.

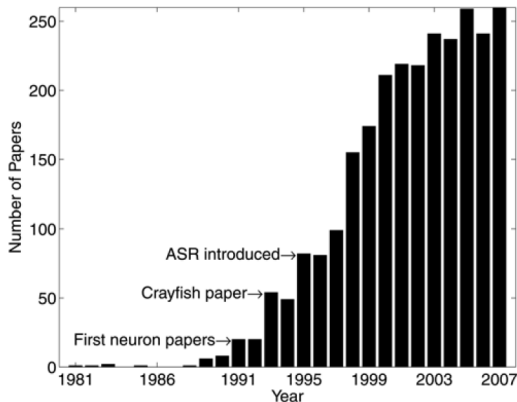


*Rezonans stochastyczny jest efektem kooperacji słabego okresowego sygnału oraz szumu.*

# Historia odkrycia rezonansu stochastycznego

- 1980 r. – pierwsze użycie terminu „rezonans stochastyczny”. Włoski fizyk Roberto Benzi określił tym terminem mechanizm powodujący okresowe występowanie epok lodowcowych na Ziemi
- 1983 r. – pierwsze laboratoryjne eksperymenty, w których zademonstrowano zjawisko rezonansu stochastycznego w układzie elektronicznym zwanym przerzutnikiem Schmitta
- od tamtej pory zainteresowanie rezonansem stochastycznym stale rośnie

# Liczba opublikowanych artykułów



*Liczba artykułów dotyczących rezonansu stochastycznego opublikowanych w latach 1981-2007.*

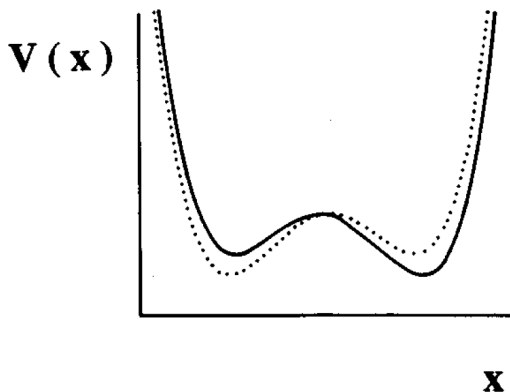
# Modele teoretyczne rezonansu stochastycznego

## Najpopularniejsze modele rezonansu stochastycznego

- 1 podwójna studnia (ang. double-well)
- 2 model z dwoma stanami (ang. two-state model)
- 3 pojedyncza studnia (ang. single-well, excitable dynamics)
- 4 niedynamiczny model progowy (ang. nondynamical threshold model)

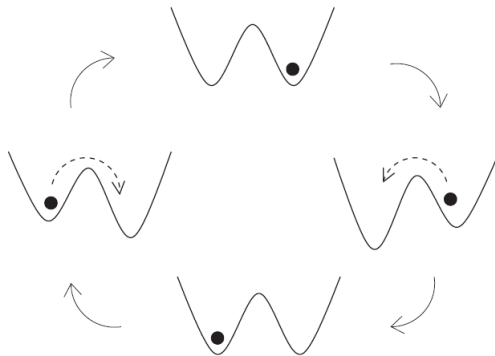


# Podwójna studnia (ang. double well)



*Model podwójnej studni. Słaby sygnał okresowo przekształca potencjał na zmianę unosząc jedną i drugą studnię.*

# Podwójna studnia



*Zjawisko zachodzące w przypadku modelu podwójnej studni. Dynamika układu jest opisana przez równanie Langevina pierwszego rzędu.*

# Model podwójnej studni

## Równanie Langevina

$$\dot{x} = -\frac{dU}{dx} + \varepsilon \sin(\omega t) + \xi(t)$$

gdzie

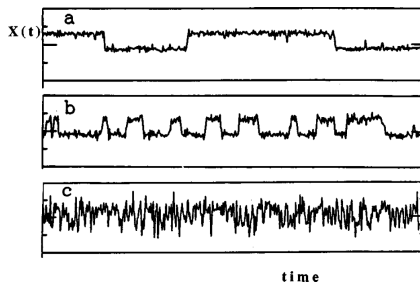
$x$  – pozycja cząstki

$U(x)$  – potencjał (zwykle wielomian czwartego stopnia)

$\xi$  – szum

$\varepsilon \sin(\omega t)$  – funkcja okresowa

# Model podwójnej studni



*Przykładowy szereg czasowy dla modelu podwójnej studni. Jeśli szum jest słaby, wówczas przejścia między studniami są rzadkie (a), jeśli jest bardzo silny – cząstka przeskakuje bez względu na małe zmiany potencjału (c). Istnieje też optymalna ilość szumu (b), przy której skoki występują w miarę regularnie.*

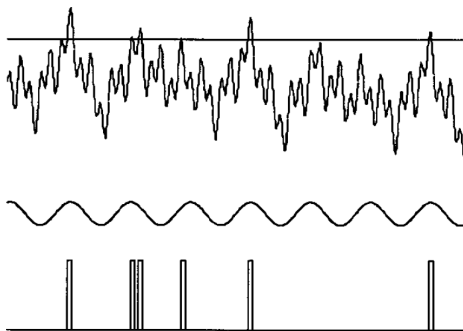
## Model z dwoma stanami (ang. two-state model)

- model dyskretny, blisko powiązany z modelem podwójnej studni
- układ może znajdować się tylko w dwóch stanach
- przerzutnik Schmitta jest fizyczną realizacją tego modelu

# Pojedyncza studnia (ang. single-well)

- układ z pojedynczym stanem spoczynku
- bistabilność nie jest koniecznym warunkiem powstawania rezonansu stochastycznego
- w modelu tym, gdy kombinacja sygnałów wejściowych wypycha układ poza poziom progowy, generuje on wyjściowy impuls, a potem powraca do stanu spoczynku
- zastosowania w biologii

# Niedynamiczny model progowy (ang. nondynamical threshold model)



*Ilustracja modelu. U góry mamy sumę losowego i okresowego składnika, pozioma linia zaznacza ustalony próg. Na środku widać okresową część sygnału wejściowego. Gdy całkowity wejściowy sygnał przekracza próg, generowany jest impuls.*

# Pomiar sygnału wyjściowego

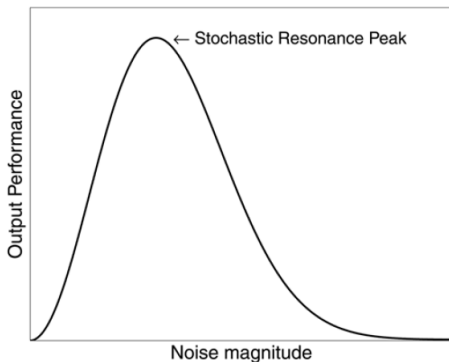
Różne sposoby pomiaru sygnału wyjściowego:

- 1 SNR (ang. signal-to-noise ratio)
- 2 informacja wzajemna (ang. mutual information)
- 3 korelacja pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym jako funkcja intensywności szumu
- 4 informacja Fishera (ang. Fisher information)

Dla bardzo dużej i małej ilości szumu miara sygnału wyjściowego jest mała, ale dla pewnego niezerowego poziomu szumu sygnał wyjściowy jest optymalny.



# Typowa krzywa



*Typowa krzywa zależności wyjściowego sygnału od ilości szumu na wejściu, dla układów zdolnych do rezonansu stochastycznego.*

# Zastosowania rezonansu stochastycznego

Rezonans stochastyczny był obserwowany w m.in.:

- modelach klimatu
- obwodach elektronicznych
- laserach
- modelach neuronowych
- reakcjach chemicznych
- kanałach jonowych
- mechanice kwantowej
- zachowaniu zwierząt
- modelach ekologicznych
- biologii komórkowej
- modelach finansowych
- nanomechanice

# Behawioralny rezonans stochastyczny

- rezonans stochastyczny obserwowany jest w zachowaniu zwierząt
- pierwszy eksperyment, w którym stwierdzono pojawianie się behawioralnego rezonansu stochastycznego był przeprowadzony ze świerszczem domowym *Acheta domestica*, który korzysta ze zjawiska rezonansu stochastycznego do określenia stanu zagrożenia i ucieczki przed drapieżnikiem



# Eksperyment z rakiem

- 1993 r. – eksperyment przeprowadzony na mechanoreceptorach komórek zmysłowych pewnego gatunku raka *Procambarus clarkii*



# Eksperyment z wioślonosem

- 1999 r. – kolejny eksperyment dotyczący behawioralnego rezonansu stochastycznego: badanie zwyczajów żywieniowych ryby z rodziny wioślonosowatych – wioślonosa amerykańskiego (*Polyodon spathula*)
- wioślonos żywi się zooplanktonem, głównie rozwielitkami (*Daphnia*)

# Wiostonos



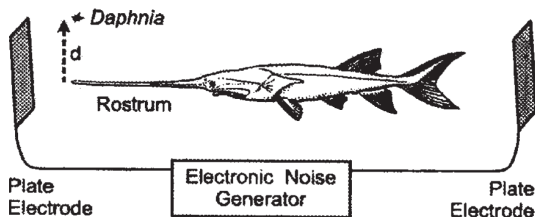
*Wiostonos amerykański*

# Rozwielitka



*Rozwielitka*

# Eksperyment z wioślonosem



*Schemat eksperymentu – wioślonos pomiędzy elektrodami. Korzystając z rostrum ryba wykrywa elektryczne sygnały emitowane przez ofiarę – rozwielitki. W eksperymencie, prawdopodobieństwo zdobycia przez rybę ofiary umieszczonej w odległości  $d$  ponad rostrum było obserwowane dla różnej siły zewnętrznego szumu produkowanego przez elektrody.*



# Rezonans stochastyczny na poziomie komórki

- behawioralny rezonans stochastyczny jest wynikiem rezonansu stochastycznego zachodzącego w komórkach
- podstawowy poziom komórkowej transmisji sygnału stanowią kanały jonowe
- temat po raz pierwszy dyskutowany był w 1991 r.
- rezonans stochastyczny ma duże znaczenie w zastosowaniach medycznych

# Zastosowania rezonansu stochastycznego w medycynie

- wzmocnienie sygnału docierającego do implantu ślimakowego (poprawa słuchu u osób korzystających z implantu)
- wykorzystanie rezonansu stochastycznego do poprawy kontroli równowagi u osób mających problemy z błędnikiem
- rezonans stochastyczny w kodowaniu i przetwarzaniu informacji w mózgu

## „The mechanism of stochastic resonance”

- **The mechanism of stochastic resonance**, R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1981, Vol. 14
- w artykule badana jest możliwość wystąpienia rezonansu w układach dynamicznych
- opisane zostało zjawisko rezonansu stochastycznego dla równania Langevina oraz dla układu Lorenza

# Równanie Langevina

## Równanie Langevina (1)

$$dx = [x(a - x^2)]dt + \varepsilon dW$$

$W$  – proces Wienera

Spostrzeżenia dotyczące części deterministycznej równania:

- $a < 0$  – jedno rozwiązanie stabilne  $x = 0$
- $a = 0$  – punkt bifurkacji
- $a > 0$  – dwa rozwiązania stabilne  $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$  i jedno niestabilne  $x = 0$

# Własności równania (1)

## Równanie Langevina (1)

$$dx = [x(a - x^2)]dt + \varepsilon dW$$

Ze względu na biały szum, rozwiązanie (1) przeskakuje w losowych chwilach między dwoma stabilnymi stanami.

Niech  $\tau_1(y)$  i  $\tau_2(y)$  będą czasami wyjścia z basenu przyciągania punktów  $x_1 = -\sqrt{a}$  oraz  $x_2 = \sqrt{a}$  odpowiednio, tzn.

$$\tau_1(y) = \inf\{t : x(t) = 0 \text{ i } x(0) = y \in (-\infty, 0)\}$$

$$\tau_2(y) = \inf\{t : x(t) = 0 \text{ i } x(0) = y \in (+\infty, 0)\}.$$

Zdefiniujmy

$$M_n^i = \langle (\tau_i(y))^n \rangle, \quad i = 1, 2, M_0^i = 1$$

## Własności równania (1)

Wówczas  $M_n^i(y)$  spełnia równanie różniczkowe,  $i = 1, 2$ :

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{d^2}{dy^2} M_n^i(y) - y(a - y^2) \frac{d}{dy} M_n^i(y) = -nM_{n-1}^i(y)$$

(Gihman i Skorohod 1972, „Stochastic Differential Equations”) z warunkami brzegowymi  $M_n^1(0) = 0$  oraz  $M_n^2(0) = 0$ .

Korzystając z metody punktu siodłowego (ang. saddle point technique) oszacowano rozwiązania powyższego równania.

Dla  $n = 1$  otrzymano:

$$M_1^1(y) \cong M_1^1(-\sqrt{a}) \cong (\pi/a\sqrt{2})\exp(a^2/2\varepsilon^2)$$

$$M_1^2(y) \cong 2[M_1^1(-\sqrt{a})]^2 \cong (\pi^2/a^2)\exp(a^2/\varepsilon^2)$$

Z powodu symetrii mamy

$$M_1^2(\sqrt{a}) = M_1^1(-\sqrt{a}).$$

# Równanie Langevina z okresowym wymuszeniem

## Równanie Langevina z okresowym wymuszeniem (2)

$$dx = [x(a - x^2) + A\cos\Omega t]dt + \varepsilon dW$$

$W$  – proces Wienera

Pokażemy, że dla  $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , układ opisany tym równaniem charakteryzuje duży pik w spektrum mocy odpowiadający prawie okresowemu zachowaniu  $x(t)$  z okresem  $\frac{2\pi}{\Omega}$  i amplitudą  $2\sqrt{a}$ .

## Własności równania Langevina (2)

### Równanie Langevina z okresowym wymuszeniem (2)

$$dx = [x(a - x^2) + A\cos\Omega t]dt + \varepsilon dW$$

Interesuje nas przypadek, gdy  $A$  jest małe w porównaniu do  $a^{3/2}$ . Aby zrozumieć efekt wymuszenia okresowego spójrzmy na równanie (2) dla  $t = 0$  oraz  $t = \pi/\Omega$ .

Otrzymano dwa niezależne od czasu równania stochastyczne:

$$dx = [x(a - x^2) + A]dt + \varepsilon dW$$

$$dx = [x(a - x^2) - A]dt + \varepsilon dW$$

Podobnie, jak równanie (1), równania te mają dwa punkty stabilne oraz jeden punkt niestabilny. Jednak nie ma już symetrii i dlatego czasy opuszczenia basenów przyciągania nie są równe.



## Własności równania Langevina (2)

Niech  $x_1'$  będzie punktem stałym równania

$$dx = [x(a - x^2) + A]dt + \varepsilon dW$$

a  $x_1''$  punktem stałym równania

$$dx = [x(a - x^2) - A]dt + \varepsilon dW$$

Postępując podobnie jak poprzednio, otrzymano:

$$\mu(x_1') \cong \frac{\pi}{a\sqrt{2}} \exp(\sqrt{a^2} 2\varepsilon^2 (1 + \frac{4A}{a^{3/2}}))$$

$$\nu(x_1'') \cong \frac{\pi}{a\sqrt{2}} \exp(\sqrt{a^2} 2\varepsilon^2 (1 - \frac{4A}{a^{3/2}}))$$

gdzie  $\mu(x_1')$  i  $\nu(x_1'')$  to średnie czasy opuszczenia basenów przyciągania, do których należą  $x_1'$  i  $x_1''$ .

Wraz z upływem czasu, prawdopodobieństwo opuszczenia basenu przyciągania wzrasta i osiąga maksimum dla  $t = \pi/\Omega$ .

## Własności równania Langevina (2)

Niech  $\tau$  – średni czas opuszczenia basenu przyciągania, wówczas

$$\nu(x_1'') < \tau < \mu(x_1')$$

Teraz jeśli

$$\mu(x_1') \geq \pi/\Omega \quad \text{i} \quad \nu(x_1'') \ll \pi/\Omega,$$

wówczas  $\tau \approx \pi/\Omega$ , a wariancja czasu opuszczenia jest rzędu  $\nu(x_1'')$ . Z prawdopodobieństwem 1, rozwiązanie równania (2) z warunkiem początkowym  $x = x_1'$  w chwili  $t = 0$  skoczy do punktu  $x = x_2''$  w chwili  $t = \pi/\Omega$ .

Można sprawdzić, że rozwiązanie spędzi około  $\pi/\Omega$  w nowym basenie przyciągania i w chwili  $t = 2\pi/\Omega$  skoczy do punktu  $x_1'$ . W tym przypadku  $x(t)$  będzie skakać pomiędzy dwoma stabilnymi stanami niemal okresowo zgodnie z okresowym wymuszeniem.

## Własności równania Langevina (2)

Gdy  $\mu(x_1') \geq \pi/\Omega$  i  $\nu(x_1'') \ll \pi/\Omega$ ,

widać, że, aby spełnione były nierówności, wariancja szumu musi być zawarta w przedziale  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , gdzie  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  są dane przez

$$\varepsilon_1 = a \left( \frac{1-4A/a^{3/2}}{2 \ln(2\sqrt{2a}/\Omega)} \right)^{1/2}$$

$$\varepsilon_2 = a \left( \frac{1+4A/a^{3/2}}{2 \ln(2\sqrt{2a}/\Omega)} \right)^{1/2}$$

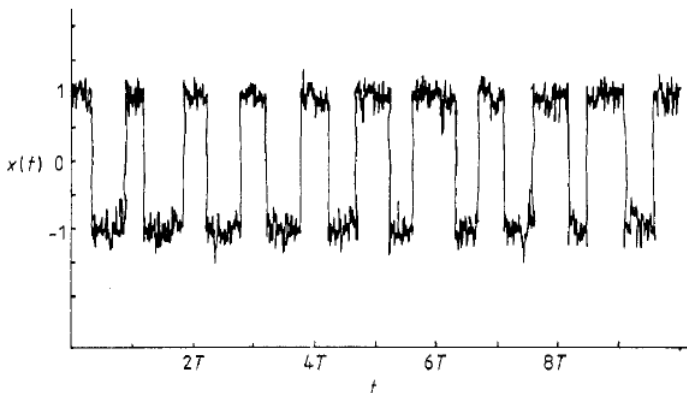
gdzie dla

$$\varepsilon = \varepsilon_1, \quad \nu(x_1'') = \pi/\Omega$$

i dla

$$\varepsilon = \varepsilon_2, \quad \mu(x_1') = \pi/\Omega$$

# Wykres



Numeryczna symulacja równania (2) z  $a = 1$ ,  $A = 0,12$ ,  
 $\Omega = 2\pi/T = 10^{-3}$  i  $\varepsilon = 0,25$ . Otrzymano  $\varepsilon_1 = 0,18$  oraz  
 $\varepsilon_2 = 0,31$ ,  $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .

# „Stochastic resonance in an autonomous system with a nonuniform limit cycle”

- **Stochastic resonance in an autonomous system with a nonuniform limit cycle**, W. Rappel, S. Strogatz, *Physical Review E*, October 1994, Vol. 50, No. 4
- badanie rezonansu stochastycznego w autonomicznym układzie z niejednorodnym cyklem granicznym

Rozważmy układ zapisany we współrzędnych biegunowych

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) + q_1(t) \\ \dot{\theta} &= b - r^2 \cos(2\theta) + q_2(t)\end{aligned}$$

$b$  – parametr kontrolny

$q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  – wyrazy odpowiedzialne za biały szum

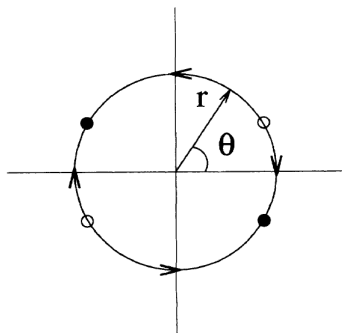
# Własności układu przy braku obecności szumu

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= b - r^2 \cos(2\theta)\end{aligned}$$

Portret fazowy zależy wówczas od  $b$  w następujący sposób:

- dla  $b > 1$  układ ma stabilny cykl graniczny przy  $r = 1$  z okresem  $\int_0^{2\pi} d\theta / [b - \cos(2\theta)]$
- dla  $b < 1$  – cykl graniczny nie istnieje, w zamian za to mamy cztery punkty na okręgu o promieniu  $r = 1$  z  $\theta = \pm \frac{1}{2} \arccos(b)$ .  
Dwa z tych punktów są stabilne, a pozostałe dwa niestabilne. Stabilne i niestabilne punkty zbiegają do siebie, gdy  $b$  zmierza do 1.
- dla  $b = 1$  punkty zderzają się i znikają dla  $b > 1$

# Portret fazowy układu



*Portret fazowy układu z dwoma stabilnymi punktami (zamalowane) oraz dwoma niestabilnymi (niezamalowane) i przepływem na okręgu o promieniu  $r = 1$ .*

# Własności układu dla $b < 1$

Dla  $b < 1$ :

- gdy nie ma szumu, układ dąży do jednego z dwóch punktów stabilnych
- efektem szumu jest wyprowadzenie układu ze stabilnego punktu
- gdy  $b$  jest bliskie 1, stabilne i niestabilne punkty są blisko siebie – jeśli szum jest wystarczająco silny, układ może czasami być wypchnięty daleko na stronę niestabilnego punktu, po czym popłynie gwałtownie wokół okręgu w kierunku drugiego punktu stabilnego
- ten sam scenariusz może mieć miejsce wokół drugiego punktu
- to prowadzi do ruchu wokół okręgu z określoną częstotliwością
- wzrost szumu powoduje wzrost częstotliwości



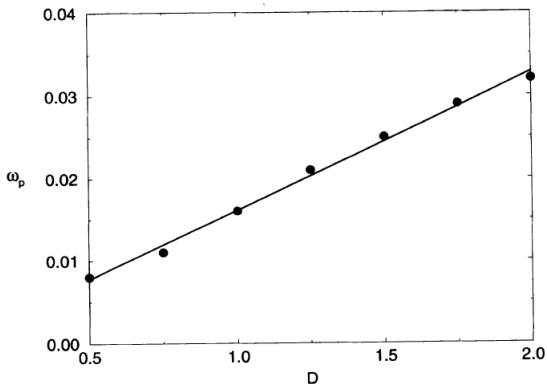
# Własności układu dla $b < 1$

Układ z szumem:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= b - r^2 \cos(2\theta) + q_2(t)\end{aligned}$$

- badamy ruch układu na okręgu  $r = 1$
- szum jest generowany przez wybranie losowej liczby z rozkładu jednostajnego pomiędzy  $-1$  a  $1$ , a następnie pomnożenie jej przez siłę szumu  $D$
- numerycznie całkujemy układ, korzystając z metod opisanych w artykule Gang, Ditzinger, Ning, Haken, Phys. Rev. Lett 71, 807 (1993) i obliczamy pozycję  $\omega_p$  piku w spektrum mocy
- dla małej siły szumu  $\omega_p$  wzrasta w przybliżeniu liniowo wraz z  $D$

# Wykres



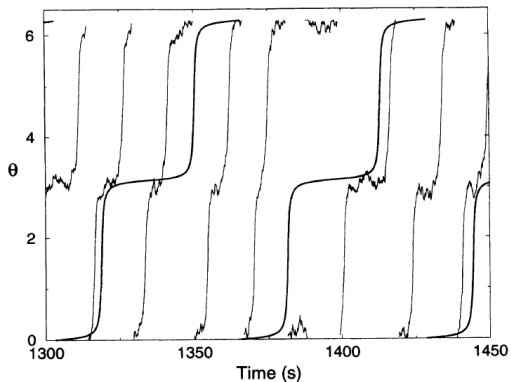
*Zależność  $\omega_p$  w spektrum mocy od siły szumu  $D$  dla  $b = 0.99$ .*

# Własności układu dla $b > 1$

Dla  $b > 1$ :

- układ ma cykl graniczny
- bez szumu i dla  $b$  bliskiego 1 ruch wokół cyklu granicznego jest wysoce niejednorodny – układ wolno przechodzi przez regiony wokół  $\theta = 0$  i  $\theta = \pi$
- efektem szumu jest szybsze pokonywanie przez układ wolnych regionów
- częstotliwość wzrasta w obecności szumu

# Szereg czasowy układu



*Szereg czasowy dla  $\theta$ , w przypadku cyklu granicznego ( $b = 1.005$ ).  
Grubsza linia – brak szumu, cienka –  $D = 0.01$ .*

Dziękuję!