

Artykuły

- **The mechanism of stochastic resonance**, R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1981, Vol. 14
- **Stochastic resonance in an autonomous system with a nonuniform limit cycle**, W. Rappel, S. Strogatz, *Physical Review E*, October 1994, Vol. 50, No. 4
- **Minireview of stochastic resonance**, K. Wiesenfeld, F. Jaramillo, *Chaos*, September 1998, Vol. 8, No. 3

Artykuły

- **What is stochastic resonance? Definitions, misconceptions, debates, and its relevance to biology**, M. D. McDonnell, D. Abbott, *Computational Biology*, May 2009, Vol. 5, Issue 5
- **Stochastic resonance**, T. Wellens, V. Shatokhin, A. Buchleitner, *Reports on Progress in Physics*, 2004, Vol. 67
- **Theory of stochastic resonance**, B. McNamara, K. Wiesenfeld, *Physical Review A*, 1 May 1989, Vol. 39, No. 9
- **Stochastic resonance on a circle**, K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazelou, C. Dames, F. Moss, *Physical Review Letters*, 4 April 1994, Vol. 72, No. 14

1 Co to jest SR?

Klasyczny rezonans Klasyczny rezonans występuje w sytuacjach, w których układ dynamiczny mający okresowe oscylacje o pewnych częstotliwościach w poddany okresowemu wymuszeniu o częstotliwości bliskiej w wykazuje wyraźną reakcję (np. klasyczny przykład wymuszonego oscylatora harmonicznego).

Szum

Czy obecność szumu może być korzystna?

- szum to ogólne pojęcie, które zazwyczaj opisuje niepożądane zakłócenia lub fluktuacje
- jeśli układ działa idealnie, to szum jest wrogiem
- jeśli nie wszystko jest idealne, to okazuje się, że obecność szumu lub nieprzewidywalnych fluktuacji może prowadzić do pewnych korzyści

Wyobraźmy sobie układ, na który działają dwa bodźce: pierwszy jest duży i losowy, drugi słaby i okresowy. Co dostaniemy w odpowiedzi?

W układzie, w którym zachodzi rezonans stochastyczny możemy dostać sygnał, który jest dość regularny.

W praktyce układ nigdy nie może być idealnie zaimplementowany.

Szum jest zazwyczaj podstawowym wrogiem np. inżynierów, których celem jest zapewnienie, że informacja może być transmitowana bezbłędnie i wydajnie z jednego miejsca do innego, z najszybszą możliwą szybkością. Pojawiający się losowy szum (w postaci np. elektronicznych fluktuacji) uszkadza transmitowane wiadomości, ogranicza szybkość bezbłędnej komunikacji.

Typowo, należałoby oczekiwać że w odpowiedzi dostaniemy dużą losowość z być może małą tendencją okresową. Jednak w układzie wykazującym SR odpowiedź może być całkiem inna: jest ona dość regularna z tylko małymi fluktuacjami (tzn. dzięki dodaniu szumu obserwujemy wzrost jakości sygnału transmisji!). To sprzeczne z intuicją zjawisko wynika z nieliniowości układu i zależy też od zakresu pewnych parametrów.

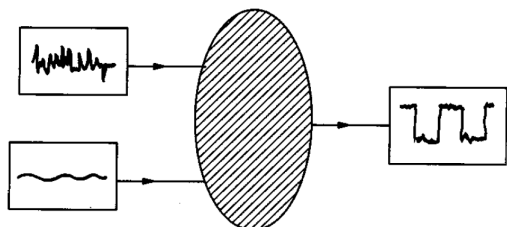
Możemy spojrzeć też na SR z jeszcze innej perspektywy. Przypuśćmy, że układ jest pewnego rodzaju detektorem (np. odbiornikiem radiowym), który próbuje wydobyć słaby okresowy sygnał osadzony w dużej ilości szumu tła. W pewnych okolicznościach wzrost ilości szumu wejściowego, może poprawić działanie detektora (np. dodanie szumu może spowodować wzrost SNR – signal-to-noise ratio).

Odnosnie schematu: zakresowana elipsa reprezentuje „czarną skrzynkę”, do której docierają dwa sygnały: jeden słaby i okresowy, drugi: silny i losowy. Na wyjściu sygnał jest względnie regularny z małymi fluktuacjami.

Czym jest rezonans stochastyczny?

Rezonans stochastyczny

Rezonans stochastyczny to zjawisko występujące w układach dynamicznych, których odpowiedź na zewnętrzny sygnał osiąga wartość optymalną w obecności szumu o pewnym konkretnym natężeniu. Istotna jest nieliniowość układu deterministycznego.



Rezonans stochastyczny jest efektem kooperacji słabego okresowego sygnału oraz szumu.

Definicja z Wikipedii Rezonans stochastyczny to zjawisko, w którym odpowiedź układu dynamicznego na zewnętrzny sygnał osiąga wartość optymalną w obecności szumu o pewnym konkretnym natężeniu. Szum może niekiedy poprawić, nie zaś wyłącznie pogorszyć własności niektórych urządzeń. Zjawisko to dotyczy układów nieliniowych, które mogą posiadać kilka stabilnych stanów. Sygnał pozbawiony szumów nie powoduje przejścia pomiędzy stanami (na przykład przejścia urządzenia w stan detekcji sygnału). Sygnał z małym szumem może powodować przejścia pomiędzy stanami zgodnie z sygnałem (na przykład detekcja sygnału może nie być trwała). Istnieje pewien optymalny poziom szumu (zapewniający na przykład detekcję sygnału). Zbyt wielki poziom szumu powoduje jednak że sygnał zaczyna „ginąć” w szumie (detekcja sygnału przestaje być stabilna ze względu na znaczny poziom szumu).

Rezonans stochastyczny jest zjawiskiem, występującym także w układach bistabilnych, poddanych działaniu szumu stochastycznego i słabego sygnału periodycznego. W określonych warunkach wzrost natężenia szumu może, paradoksalnie, prowadzić do większego uporządkowania (większego stopnia periodyczności) sygnału wyjściowego. W widmie mocy sygnału wyjściowego występuje wówczas pik na częstotliwości wejściowego sygnału periodycznego, osiągający maksymalną wysokość przy niezerowym natężeniu szumu wejściowego. Podobne zjawisko obserwuje się przy zmianach parametru kontrolnego w układach chaotycznych z „bistabilnymi atraktorami” (na przykład układ Lorenza, Chua, układy chaotyczne po kryzysie połączenia atraktorów), pobudzanych słabym sygnałem okresowym. Rezonans stochastyczny zaobserwowano również w układzie nerwowym, zarówno na poziomie analizy sygnałów w kolumnach neuronalnych jak i poziomie skojarzeniowym.

Początkowo pojęcie SR było używane w wąskim kontekście, obecnie jest ono stosowane do opisu wszystkich zjawisk, gdzie obecność szumu w układzie nieliniowym jest lepsza dla otrzymywanej jakości sygnału, niż jego brak. Kluczowa jest tutaj nieliniowość, szum nie może przynosić korzyści w układzie liniowym; tylko złożone interakcje pomiędzy nieliniowością i losowością mogą prowadzić do SR. W skrócie:

występowanie(nieliniowość+szum) > występowanie(nieliniowość)

Zwykle słowo „lepsze” oznacza, że w pewnym aspekcie przetwarzanie lub transmisja sygnału są poprawione.

Historia odkrycia rezonansu stochastycznego

- 1980 r. – pierwsze użycie terminu „rezonans stochastyczny”. Włoski fizyk Roberto Benzi określił tym terminem mechanizm powodujący okresowe występowanie epok lodowcowych na Ziemi
- 1983 r. – pierwsze laboratoryjne eksperymenty, w których zademonstrowano zjawisko rezonansu stochastycznego w układzie elektronicznym zwanym przerzutnikiem Schmitta
- od tamtej pory zainteresowanie rezonansem stochastycznym stale rośnie

Benzi w trakcie NATO International School of Climatology zaproponował, że to SR jest wiarygodnym mechanizmem stojącym za prawie okresowym występowaniem (co około 100 000 lat) epok lodowcowych na Ziemi w ciągu ostatnich 700 000 lat.

Model klimatu był pierwszym modelem, gdzie po raz pierwszy odkryto kooperacyjny efekt pomiędzy okresową zewnętrzną siłą i wewnętrzną stochastyczną w nieliniowym układzie dynamicznym i gdzie po raz pierwszy użyto terminu SR. Okazuje się, że w tym czasie miało miejsce co najmniej siedem globalnych spadków temperatury o około 10K (co około 100 000 lat). Te zimne okresy odpowiadają siedmiu okresom zlodowacenia na Ziemi (epokom lodowcowym).

Benzi wyjaśnił to zjawisko następująco: okazuje się, że ekscentryczność ziemskiej orbity (inaczej mimośród –

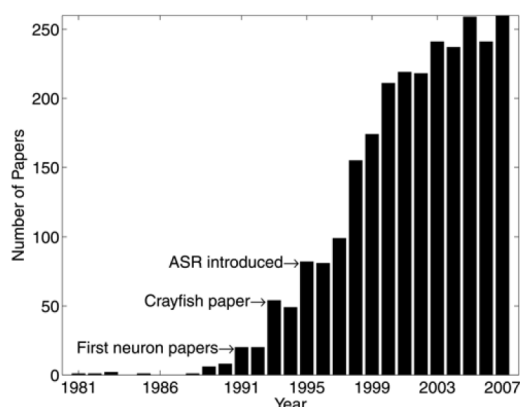
wielkość charakteryzująca kształt orbity opisywanej równaniem parametrycznym krzywej stożkowej ciała obiegającego drugie ciało pod wpływem siły grawitacji) podlega małym oscylacjom z okresem 100 000 lat. Choć małe zmiany orbity nie powinny być bezpośrednim powodem dużym klimatycznych zmian (sygnał powodowany przez zakłócenia planetarnej grawitacji ziemskiej orbity jest zbyt słaby, by mógł zmienić temperaturę o 10K), Benzi sugerował, że mogą one podlegać innym losowym wpływom, prowadząc do regularności obserwowanego zachowania.

SR dostarczył wiarygodnego wyjaśnienia: słabemu sygnałowi towarzyszą zaszumione fluktuacje przyzptywającej słonecznej energii spowodowane turbulentną dynamiką ziemskiej atmosfery. Można to zamodelować przy użyciu modelu podwójnych studni..

Rola SR w cyklach zlodowacenia Ziemi pozostała kontrowersyjna, ale idea SR przyciągnęła naukowców głównie ze względu na rolę, jaką SR zaczął on odgrywać w biologii.

Mimo to, inne klimatyczne zjawiska również były opisywane w terminach SR np. niemal okresowe ocieplenia północnego Atlantyku z okresem ok. 1500 lat.

Liczba opublikowanych artykułów



Liczba artykułów dotyczących rezonansu stochastycznego opublikowanych w latach 1981-2007.

Od tamtej pory SR stał się tematem wielu artykułów, niektóre z nich skupiają się na fizycznym lub matematycznym opisie SR, inne na obserwacji SR w układach elektronicznych lub na potencjalnych zastosowaniach SR. Jest też duża grupa artykułów poświęcona SR w biologii.

Rezonans stochastyczny został zaobserwowany w wielu układach fizycznych, biologicznych, włącznie z neuronami. Teoria dotycząca SR, będąc tematem zainteresowania wielu różnych dziedzin nauki, bardzo rozwinęła się w ostatnich latach. Powstaje coraz więcej artykułów na ten temat (około 20% z nich dotyczy neuronów i układu nerwowego).

Modele teoretyczne Nie tylko badano SR eksperymentalnie, lecz równolegle z eksperymentami prowadzono także badania nad rozwojem teorii dotyczącej rezonansu stochastycznego. Patrząc z perspektywy czasu, widać, że te badania łączył fakt, że odkrywały one coraz szerszy zakres okoliczności, w którym SR mógł się pojawiać. Początkowo, SR był definiowany tylko w bardzo specyficznym kontekście układu bistabilnego, na którego działa kombinacja sygnału okresowego i losowy szum. Ta definicja później znacznie się rozszerzyła. Najszersza możliwa definicja SR mówi, że SR pojawia się, gdy losowość odgrywa pozytywną rolę w przetwarzaniu sygnałów. Oto kilka najpopularniejszych i najbardziej użytecznych modeli teoretycznych.

Modele teoretyczne rezonansu stochastycznego

Najpopularniejsze modele rezonansu stochastycznego

1. podwójna studnia (ang. double-well)
2. model z dwoma stanami (ang. two-state model)
3. pojedyncza studnia (ang. single-well, excitable dynamics)
4. niestabilny model progowy (ang. nondynamical threshold model)
5. model z oscylującym wskaźnikiem (ang. fluctuating rate model)

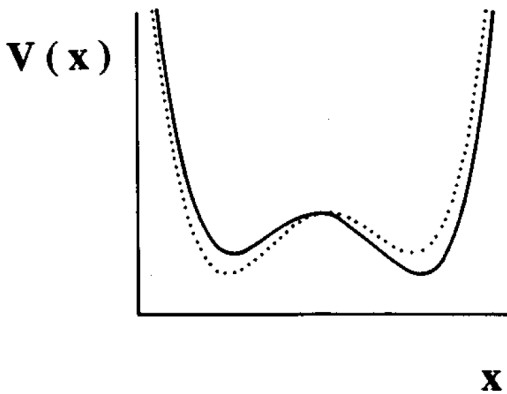
W najprostszej postaci rezonans stochastyczny pojawia się w bistabilnym układzie sterowanym przez zewnętrzną siłę. Bistabilny potencjał jest poddany słabemu okresowemu sygnałowi powodującemu, że studnie na

zmianę są podnoszone i opadają (w odniesieniu do bariery). Amplituda samego sygnału jest niewystarczająca, aby spowodować przeskoczenie bariery przez cząstkę i zmianę studni, ale z dodatkiem szumu, zazwyczaj gaussońskiego i białego, prawdopodobieństwo zmiany studni staje się niezerowe i zmienia się wraz z okresem sygnału (momentem w okresie sygnału). W rezultacie ruch jest ciągiem zmieniających się zdarzeń, które występują w mniej więcej losowych chwilach, ale z pewnym stopniem zgodności z sygnałem.

Model złożony z potencjału podwójnej studni jest pierwszym modelem SR i jednym z najczęściej opisywanym – rozważamy cząstkę poruszającą się w jednym wymiarze w potencjale z dwoma minimami. Cząstka jest także poddana sile okresowej, losowemu szumowi oraz lepkiemu tarcia.

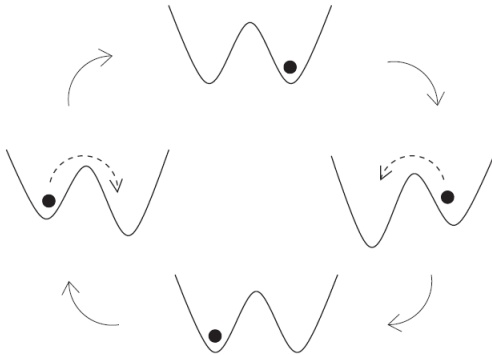
Ignorując siłę bezwładności, dynamika takiego układu jest opisana przez równanie Langevina pierwszego rzędu. W literaturze częściej rozważa się potencjał, który jest czysto symetryczny tzn. U jest nawet funkcją x , gdyż antysymetria sprawia, że efekt SR zanika.

Podwójna studnia (ang. double well)



Model podwójnej studni. Słaby sygnał okresowo przekształca potencjał na zmianę unosząc jedną i drugą studnię.

Podwójna studnia



Zjawisko zachodzące w przypadku modelu podwójnej studni. Dynamika układu jest opisana przez równanie Langevina pierwszego rzędu.

Model podwójnej studni

Równanie Langevina

$$\dot{x} = -\frac{dU}{dx} + \varepsilon \sin(\omega t) + \xi(t)$$

gdzie x – pozycja cząstki $U(x)$ – potencjał (zwykle wielomian czwartego stopnia) ξ – szum (zwykle biały) $\varepsilon \sin(\omega t)$ – funkcja okresowa

$\varepsilon \sin(\omega t)$ – może być postrzegana jako przekształcająca potencjał w sposób antysymetryczny; na zmianę lekko wzmacnia jedno minimum względem drugiego.

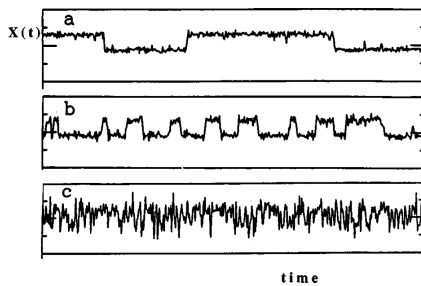
Podstawowy mechanizm SR: w obecności optymalnego poziomu szumu, stochastycznie aktywowane przejścia pomiędzy dwoma stanami są bardziej prawdopodobne po połowie cyklu okresowego sygnału. Zatem odpowiedź jest

optymalnie zsynchronizowana z zewnątrznie przekształcanym potencjałem podwójnych studni przy niezerowej sile szumu.

Szum biały – rodzaj szumu akustycznego (a ogólniej: wszelkiego rodzaju szumów – sygnałów o przypadkowo zmieniających się w czasie parametrach, w tym sygnałów elektromagnetycznych, a także – np. w ekonomii – wahań kursów walut albo akcji na giełdzie, w demografii – wahań liczby ludności itp.) o całkowicie płaskim widmie.

WAS: Biały szum (ξ_t) – $dx/dt = b(x(t)) + \xi_t$, gdzie ξ_t – i.i.d., symetryczne, o nieskończonej wariancji i Gaussa. Szum zależny jest od stanu.

Model podwójnej studni



Przykładowy szereg czasowy dla modelu podwójnej studni. Jeśli szum jest słaby, wówczas przejścia między studniami są rzadkie (a), jeśli jest bardzo silny – cząstka przeskakuje bez względu na małe zmiany potencjału (c). Istnieje też optymalna ilość szumu (b), przy której skoki występują w miarę regularnie.

Intuicja (b) – przejścia mniej więcej dwukrotnie w ciągu jednego okresu przekształcania potencjału).

Obrazek dwóch studni jest dobrą ilustracją, aby zrozumieć, dlaczego w pierwszej chwili sprzeczne z intuicją pojęcie SR jest fizycznie wiarygodnie. Bez szumu cząstka utknie w jednej ze studni na zawsze. Szum pozwala czasami przeskoczyć jej ponad barierę. Jeśli jest początkowo w lewej studni, istnieje duża szansa, że przeskoczy do drugiej, kiedy lewa studnia będzie najpłytsza. Jeśli dokonana takiej zmiany, wówczas będzie istniała duża szansa, że powróci do poprzedniej studni po połowie okresu (gdy prawa studnia będzie najpłytsza).

Model dwóch stanów (ang. two-state model)

- model dyskretny, blisko powiązany z modelem podwójnej studni
- układ może znajdować się tylko w dwóch stanach
- model ten może być analizowany przez badanie równania kinetycznego
- przerzutnik Schmitta jest fizyczną realizacją tego modelu

Dynamika układu jest opisana w terminach równań kinetycznych na rozkład prawdopodobieństwa $x(t)$ nad dwoma stanami, z zależnymi od czasu współczynnikami przejścia.

Model dwóch stanów może być analizowany przez badanie równania kinetycznego:

$$\dot{p}_+ = W_{\uparrow}p_- - W_{\downarrow}p_+$$

gdzie

$p_+(t)$ – prawdopodobieństwo, że układ jest w wyższym „stanie”

$p_- = 1 - p_+$ – prawdopodobieństwo, że układ jest w „niższym stanie”

$W_{\uparrow}, W_{\downarrow}$ – tempa przejścia pomiędzy dwoma stanami

W dwustanowym modelu, układ znajduje się w danej chwili albo w stanie pierwszym albo w stanie drugim.

Dynamika w każdym stanie jest zaniedbywana, interesuje nas tylko czy układ jest w stanie 1 czy w stanie 2 w danej chwili t .

Przy braku obecności sygnału, to tempo jest stałe i zdeterminowane przez siłę szumu. Sygnał sprawia, że tempo jest zależne od czasu.

To liniowe równanie kinetyczne jest proste do rozwiązania, jeśli tempo przejścia jest określone. Model jest dość elastyczny, o ile wskaźniki tempa są dobrane tak, by pasowały niezależnie od badanego układu.

Ta elastyczność ma jednak swój koszt: chcielibyśmy móc określać, jak tempo zależy od siły sygnału i szumu, aby móc stwierdzić, czy oczekujemy pojawienia się SR. W modelu dwóch studni, wystarczyło zapisać równania Langevina, nie trzeba było określać nic więcej.

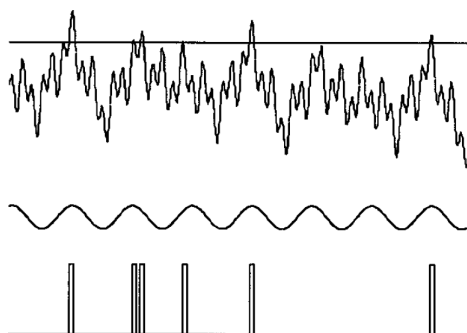
Pojedyncza studnia (ang. single-well)

- układ z pojedynczym stanem spoczynku
- bistabilność nie jest koniecznym warunkiem powstawania rezonansu stochastycznego
- w modelu tym, gdy kombinacja sygnałów wejściowych wypycha układ poza poziom progowy, generuje on wyjściowy impuls, a potem deterministycznie powraca do stanu spoczynku
- zastosowania w biologii

Innym modelem, w którym także może pojawiać SR jest układ z pojedynczym stanem „spoczynku”. Matematycznie taki model może być sformułowany w wersji ciągłej lub dyskretnej. Ważne jest, że odpowiedź układu jest scharakteryzowana przez pewien rodzaj progu, który definiuje średnią skalę czasową, na której może zajść zdarzenie indukowane przez szum.

W dwustanowym modelu, próg jest dany przez barierę potencjału oddzielającą dwa stany, ale bardzo podobne zachowanie może zostać odnalezione w układach „excitable”. Tutaj przejścia do wzbudzonych stanów są aktywowane przez szum i występują w losowych chwilach.

Niedynamiczny model progowy(ang. nondynamical threshold model)



Ilustracja modelu. U góry mamy sumę losowego i okresowego składnika, pozioma linia zaznacza ustalony próg. Na środku widać okresową część sygnału wejściowego. Gdy całkowity wejściowy sygnał przekracza próg, generowany jest impuls.

Jeszcze prostszy jest model nazywany niedynamicznym (choć to może mylące). Wyobraźmy sobie, że chwilowy stan układu jest prostą sumą sygnału i szumu wejściowego. Za każdym razem, gdy ta suma przecina ustalony próg w jedną stronę, powoduje to powstanie wąskiego kolca w sygnale wyjściowym.

Pomiar sygnału wyjściowego

Różne sposoby pomiaru sygnału wyjściowego:

1. SNR (ang. signal-to-noise ratio)
2. informacja wzajemna (ang. mutual information)
3. korelacja pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym jako funkcja intensywności szumu
4. informacja Fishera (ang. Fisher information)

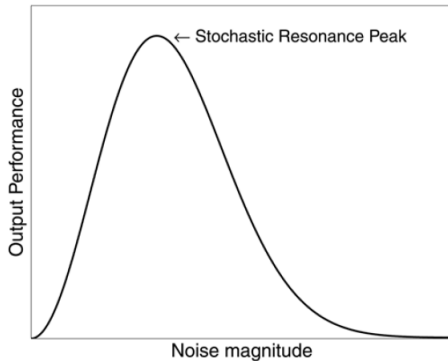
Dla dużej i małej ilości szumu miara sygnału wyjściowego jest bardzo mała, podczas gdy dla pewnego niezzerowego poziomu szumu, wyjściowy sygnał jest optymalny.

Pomiary sygnału wejściowego w zależności od ilości szumu:

- SNR – stosowana do sygnałów okresowych i szumu szerokopasmowego
informacja wzajemna lub korelacja – stosowana, gdy sygnał jest nieokresowy i losowy
SNR – stosunek sygnału do szumu (SNR, ang. signal-to-noise ratio) – stosunek sygnału (użytecznego) do szumu we wszelkich urządzeniach elektronicznych oraz w telekomunikacji analogowej i cyfrowej. Określa wartość (wyrażoną najczęściej w dB) mocy sygnału użytecznego w zadanym paśmie częstotliwościowym do mocy szumów w tym samym paśmie częstotliwościowym
- informacja Fishera – stosowana, gdy chcemy szacować sygnał wejściowy lub jego parametry z zaobserwowanego sygnału wyjściowego

- *informacja wzajemna* – pojęcie z zakresu teorii informacji, będące miarą zależności pomiędzy dwiema zmiennymi losowymi
- *indeks dyskryminacji*

Typowa krzywa



Typowa krzywa wyjściowego sygnału od ilości szumu na wejściu, dla układów zdolnych do rezonansu stochastycznego.

2 Zastosowania SR

Zastosowania rezonansu stochastycznego

Rezonans stochastyczny był obserwowany w m.in.:

- modelach klimatu
- obwodach elektronicznych
- laserach
- modelach neuronowych
- reakcjach chemicznych
- kanałach jonowych
- mechanice kwantowej
- zachowaniu zwierząt
- modelach ekologicznych
- biologii komórkowej
- modelach finansowych
- nanomechanice

Inne zastosowania: fizjologiczne populacje nerwowe i sieci, nadprzewodzących interferujących urządzeniach kwantowych, psychofizyce, tranzystorach z nanorurek, chemii organicznej półprzewodników, w systemach społecznych, nanomechanicznych oscylatorach, modelach neuronowych – czy mózg potrafi wykorzystywać szum?

Przerzutnik Schmitta (ang. Schmitt trigger)

- 1983 r. – pierwsze laboratoryjne zbadanie rezonansu stochastycznego
- w eksperymencie użyto prostego urządzenia elektronicznego – przerzutnika Schmitta

Działanie przerzutnika Schmitta

Dane wyjściowe z przerzutnika Schmitta są albo wysokie albo niskie, w zależności od napięcia danych wejściowych. W eksperymencie sygnał wejściowy był sumą okresowej i losowej części. Okresowy składnik był zbyt mały, aby spowodować przeskok, jednak z powodu szumu, sygnał wyjściowy okresowo przełączał się pomiędzy dwoma stanami.

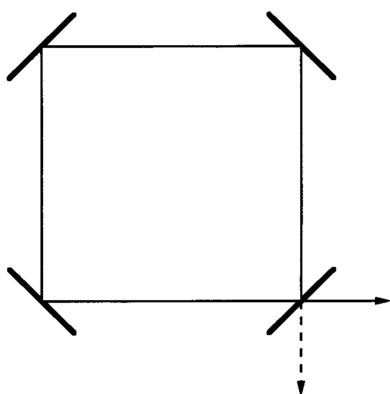
Laser pierścieniowy (ang. laser ring)

- 1988 r. – eksperyment z układem optycznym – laserem pierścieniowym

Działanie lasera pierścieniowego

Wiązka lasera rozchodzi się w zamkniętej pętli (pozwala na to odpowiednie rozmieszczenie lusterek) w kierunku zgodnym lub przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Przełączanie kierunku lasera następuje w wyniku działania sygnału akustycznego. W eksperymencie sygnał akustyczny miał mały składnik okresowy (zbyt mały, aby spowodować przełączenie samoistne kierunku) oraz duży składnik losowy.

Laser pierścieniowy



Schemat lasera pierścieniowego.

Lusterko w dolnym prawym rogu transmituje wiązkę częściowo: część wiązki lasera (poruszającego się zgodnie ze wskazówkami zegara) leci w dół.

W każdej chwili, wiązka lasera może przemieszczać się albo w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara albo w kierunku przeciwnym.

Jeśli zbierzemy dane z wielu eksperymentów i różnych poziomów zastosowanego szumu, otrzymamy znany rysunek dla SNR względem wejściowego szumu. Dane pokazują jasne maksimum i profil, który jest często widziany w układach wykazujących SR, mianowicie – stromy wzrost i względnie łagodny spadek.

Behawioralny rezonans stochastyczny

- rezonans stochastyczny obserwowany jest w zachowaniu zwierząt
- pierwszy historycznie eksperyment, w którym stwierdzono pojawianie się behawioralnego rezonansu stochastycznego był przeprowadzony ze świerszczem domowym *Acheta domestica*, który korzysta ze zjawiska rezonansu stochastycznego do określenia stanu zagrożenia i ucieczki przed drapieżnikiem



Naturalnym pytaniem jest pytanie o to czy SR może być przyczyną znakomitej wrażliwości niektórych zwierząt na wykrywanie słabych spójnych sygnałów (i szybką na nie reakcję) zanurzonych w zaszumionym środowisku pochodzących od drapieżników lub ofiar.

SR może mieć wpływ na zachowanie zwierząt lub może je regulować!

Pewien układ u świerszczy (cercal system) odczuwa przemieszczenie cząstek spowodowane zmianą prądów powietrza, wykorzystuje w tym celu błonę bębenkową zlokalizowaną na przednich kończynach. Zmysłowe komórki nerwowe przenoszą informację o intensywności i kierunku natarcia perturbacji. Świerszcze były poddane sygnałowi i szumowi, rejestrowano impulsy z komórek nerwowych.

*Rezonans stochastycznym jest możliwym powodem ucieczki świerszczy przed atakami drapieżników, którzy powodują natarcia fal o podobnym zakresie częstotliwości, np. osa *Liris niger*. Podobne zjawisko zaobserwowano też u karaluchów.*

Eksperyment z rakiem

- 1993 r. – eksperyment przeprowadzony na mechanoreceptorach komórek zmysłowych pewnego gatunku raka *Procambarus clarkii*



Mechanoreceptor – (gr. *mechané* ‘maszyna’ + *receptor* – łc. ‘odbierający’) anat. receptor ciała odbierający bodźce mechaniczne, przekształcający energię mechaniczną i przekazujący ją w postaci impulsu do ośrodkowego układu nerwowego.

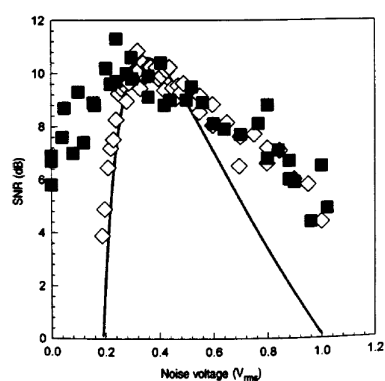
Dowód rezonansu stochastycznego w komórkach zmysłowych (rzęsatych) był po raz pierwszy odnaleziony w sygnalach nerwowych z mechanoreceptorów umieszczonych na ogonie (ang. *tail fan*) raka. Był on mechanicznie stymulowany (aby pobudzić włosy oskórka, które rak używa do wykrycia parcia fal w wodzie. Stymulacja złożona była z ruchu sinusoidalnego o częstotliwości 55.2 Hz z losowym gaussowskim szumem na różnych poziomach intensywności.

Mechanosensoryczny układ raka składa się z włosków, które są połączone z komórkami mechanoreceptorowymi. Te komórki zmysłowe są używane przez raka do wykrycia ruchów wody, wytwarzanych np. przez zbliżającego się drapieżnika. Strumienie wody poruszają włoski, które z kolei pobudzają komórki mechanoreceptorów. W eksperymencie okresowe przekształcenia natężenia wody połączone z szumem losowym były generowane w roztworze soli (w którym były zanurzone komórki i neurony sensoryczne), zapisywano reakcje neuronów dla różnego poziomu szumu, korzystając z wstawionych elektrod. Okresowy sygnał był zbyt słaby by wywołać reakcję. Większość komórek wykazywała jasny dowód SR.

Rakowi SR może pomagać w ucieczce przed drapieżnikami np. przed pewnym gatunkiem osy (*liris niger*).

Prosty teoretyczny model neuronu – równania Fitzhugh-Nagumo. Dane z elektronicznej analogowej symulacji tych równań również wykazują charakterystyczną oznakę SR.

Na rysunku przedstawiono wyniki eksperymentu z mechanoreceptorami raka (kwadraty) i analogicznej symulacji



równania Fitzhugh-Nagumo (trójkąty).

Eksperyment z wiosłonosem

- 1999 r. – kolejny eksperyment dotyczący behawioralnego rezonansu stochastycznego: badanie zwyczajów żywieniowych ryby z rodziny wiosłonosowatych – wiosłososa amerykańskiego (*Polyodon spathula*)
- wiosłonos żywi się zooplanktonem, głównie rozwielitkami (*Daphnia*)

Wiosłonos



Wiosłonos amerykański

Wiosłonos pochodzi z rodziny ryb jesiotrokształtnych.

Wiosłonos amerykański żyje głównie w dorzeczu Missisipi (*wiosłonos chiński* – dorzecze rzeki Jangcy w Chinach).

Wygląd wiosłonosy: wydłużone, walcowate ciało; głowa wyciągnięta w bardzo wydłużony ryj - rostrum - w kształcie poziomo ułożonego wiosła, który stanowi czule narzędzie czuciowe pokryte licznymi elektrodami.

Wiosłonos (Polyodon spathula) poluje na plankton korzystając z dużej liczby elektrod umieszczonych na rostrum. *Wiosłonos* jest zdolny wykrywać sygnały elektryczne, które oscylują w granicach 0.5-20Hz, a duże grupy planktonu generują właśnie tego typu sygnał.

Z powodu małego rozmiaru generowanego pola, plankton zwykle jest wylapywany przez wiosłonosy, kiedy znajduje się nie dalej niż 4cm od rostrum. Eksperyment był przeprowadzany, aby sprawdzić zdolność polowania wiosłonosy w środowisku z różnymi poziomami szumu tła. Stwierdzono, że wiosłonos efektywniej chwytal plankton (miał większy zakres rozpoznawania sygnału elektrycznego) przy niskim poziomie szumu niż przy zerowym poziomie szumu. Innymi słowy, istnieje pik w poziomie szumu, który implikuje rezonans stochastyczny.

Rozwielitka

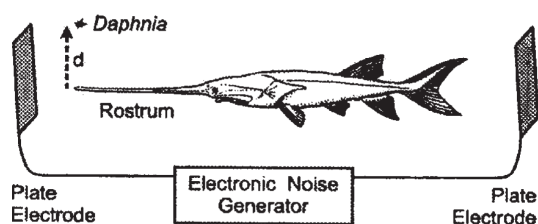


Rozwielitka

Rozwielitka – rodzaj słodkowodnych stawonogów zaliczanych do grupy wiosłarek.

Rozwielitki żyją przy dnie, gdzie słabe światło i mętna woda ograniczają widoczność. Żeby wykryć pokarm, wiosłonos używa elektrosensorycznej anteny (rostrum), długiego ryja z przodu. Najlepsza wrażliwość elektrod rostrum leży w zakresie niskich częstotliwości (0,5-20Hz), która idealnie pokrywa się z zakresem częstotliwości produkowanych przez ofiarę – rozwielitkę. W eksperymencie z głodnym wiosłonosem, prawdopodobieństwo zdobycia pokarmu obserwowane było jako funkcja pozycji ofiary względem rostrum. Co więcej, elektrody podłączono do elektrycznego generatora szumu (wygenerowano dodatkowy szum). Odkryto, że przestrzenny rozkład osiągalnych przez rostrum lokacji poszerzał się, jeśli została dodana pewna optymalna ilość szumu tzn. wiosłonos mógł pochwytać bardziej odległy plankton niż w przypadku braku szumu. Dla większych poziomów szumu, wrażliwość elektrod stopniowo spadała, prowadząc praktycznie do braku zdobywania pokarmu.

Eksperyment z wioślonošem



Schemat eksperymentu – wioślonoś pomiędzy elektrodami. Korzystając z rostrum ryba wykrywa elektryczne sygnały emitowane przez ofiarę – rozwielitki. W eksperymencie, prawdopodobieństwo zdobycia przez rybę ofiary umieszczonej w odległości d ponad rostrum było obserwowane dla różnej siły zewnętrznego szumu produkowanego przez elektrody.

Obserwacje zachowania zwierzęcia takiego jak wioślonoś, które może wykazywać SR, nie dają żadnej szczegółowej wiedzy o tym, jak organy sensoryczne i mózg przetwarzają informacje wejściowe. Jednak, wydaje się sensowne, że behawioralny SR jest tylko manifestacją SR na fundamentalnym poziomie przetwarzania sygnału w danym organizmie tzn. odpowiedzi pojedynczej komórki nerwowej (neuronu) na sygnał i szum. Neurony komunikują się między sobą lub z mięśniami przy użyciu sygnałów elektrycznych.

Rezonans stochastyczny na poziomie komórki

- behawioralny rezonans stochastyczny jest wynikiem rezonansu stochastycznego zachodzącego w komórkach
- podstawowy poziom komórkowej transmisji sygnału stanowią kanały jonowe
- temat po raz pierwszy dyskutowany był w 1991 r.
- rezonans stochastyczny ma duże znaczenie w zastosowaniach medycznych

Na głębszym poziomie, okazuje się, że pojedyncze neurony organów sensorycznych także wykazują SR przy efektywnym kodowaniu i transmisji informacji.

Komórki takie jak neurony są ograniczone przez błony, które mają wiele porów i otworów, nazywanych kanałami jonowymi. Elektryczne sygnały są transmitowane w komórkach nerwowych przez transport jonów przez kanały jonowe w błonie komórkowej. SR okazuje się być obecny w procesach przełączania pomiędzy stanem otwartym i zamkniętym pojedynczych kanałów jonowych.

Jonowa wymiana pomiędzy komórkami i ich środowiskiem jest istotna dla wielu funkcji komórkowych. Ponieważ termiczne fluktuacje lub fluktuacje pola elektrycznego produkowanego przez otoczenie stają się istotne na poziomie komórkowym, kanały jonowe są bardzo zaszumione. Szum odgrywa regulacyjną rolę w przesyłaniu sygnału przez kanały jonowe i SR jest zatem także odpowiedni na najbardziej fundamentalnym, molekularnym poziomie układów biologicznych.

Znając wiele dowodów zachodzenia zjawiska SR na różnych poziomach w układach biologicznych, nie dziwi fakt że SR ma potencjał do wielu medycznych zastosowań.

Zastosowania rezonansu stochastycznego w medycynie

- wzmocnienie sygnału docierającego do implantu ślimakowego (poprawa słuchu u osób korzystających z implantu)
- wykorzystanie rezonansu stochastycznego do poprawy kontroli równowagi u osób mających problemy z błędnikiem
- rezonans stochastyczny w kodowaniu i przetwarzaniu informacji w mózgu

Wiele propozycji użycia SR w medycynie jest bardziej lub mniej powiązana z faktem, że neurony sensoryczne są układami „excitable”. Określone dysfunkcje w organach sensorycznych odpowiedzialne za słyszenie, dotyk lub wrażenia wzruszenia czy układ kontroli równowagi mogą być rezultatem wyższej wrażliwości progów w porównaniu z tymi u zdrowych ludzi. Jako że SR ma potencjał wzmocnienia sygnału odpowiedzi układu nieliniowego, istnieje być może możliwość przywrócenia wrażliwości przy zastosowaniu odpowiedniej ilości szumu do tych organów. Implant ślimakowy pozwala odzyskać słuch osobom głęboko niesłyszącym przez bezpośrednią elektroniczną stymulację nerwu słuchowego używając chirurgicznie zaimplementowanego układu elektrod. Idea jest prosta: wiele

źródła sygnału o nieprzewidywalnej zmienności, obecnych w włóknach nerwów słuchowych podczas normalnego słyszenia nie pojawia się u osób głuchych. Istnieje hipoteza, że dobrze kontrolowany składnik losowy na wyjściowym elektrycznym sygnale w implancie ślimakowym mógłby stymulować włókna nerwowe w bardziej naturalny sposób, który może prowadzić do poprawy słuchu.

Nie tylko narządy zmysłów, ale także pewne funkcje mózgu wykazują SR. Być może SR odgrywa ważną rolę w kodowaniu i przetwarzaniu informacji w mózgu (w pewien sposób powoduje lepszą pracę mózgu dającą ludziom przewagę nad komputerami). SR może być użyty w pewnych obszarach pracy nad sztuczną inteligencją.

Zainteresowanie SR w medycynie stale rośnie.

3 Artykuł 1

„The mechanism of stochastic resonance”

- **The mechanism of stochastic resonance**, R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1981, Vol. 14
 - w artykule badana jest możliwość wystąpienia rezonansu w układach dynamicznych
 - opisane zostało zjawisko rezonansu stochastycznego dla równania Langevina oraz dla układu Lorenza
- zachowanie stochastyczne=mają ciągle spektrum mocy*

Równanie Langevina

Równanie Langevina (1)

$$dx = [x(a - x^2)]dt + \varepsilon dW$$

W – proces Wienera Spostrzeżenia dotyczące części deterministycznej równania:

- $a < 0$ – jedno rozwiązanie stabilne $x = 0$
- $a = 0$ – punkt bifurkacji
- $a > 0$ – dwa rozwiązania stabilne $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ i jedno niestabilne $x = 0$

Zbadamy równanie Langevina poddane małemu okresowemu wymuszeniu.

Równanie Langevina z okresowym wymuszeniem

Równanie Langevina z okresowym wymuszeniem (2)

$$dx = [x(a - x^2) + A\cos\Omega t]dt + \varepsilon dW$$

W – proces Wienera Pokażemy, że dla $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, układ opisany tym równaniem charakteryzuje duży pik w spektrum mocy odpowiadający prawie okresowemu zachowaniu $x(t)$ z okresem $\frac{2\pi}{\Omega}$ i amplitudą $\frac{2}{\sqrt{A}}$.

Własności równania (1)

Równanie Langevina (1)

$$dx = [x(a - x^2)]dt + \varepsilon dW$$

Ze względu na biały szum, rozwiązanie (1) przeskakuje w losowych chwilach między dwoma stabilnymi stanami. Niech $\tau_1(y)$ i $\tau_2(y)$ będą czasami wyjścia z basenu przyciągania punktów $x_1 = -\sqrt{a}$ oraz $x_2 = \sqrt{a}$ odpowiednio, tzn.

$$\tau_1(y) = \inf\{t : x(t) = 0 \text{ i } x(0) = y \in (-\infty, 0)\} \quad \tau_2(y) = \inf\{t : x(t) = 0 \text{ i } x(0) = y \in (+\infty, 0)\}.$$

Zdefiniujmy

$$M_n^i = \langle (\tau_i(y)^n) \rangle, \quad i = 1, 2, \quad M_0^i = 1$$

Własności równania (1)

Wówczas $M_n^i(y)$ spełnia równanie różniczkowe, $i = 1, 2$:

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{d^2}{dy^2} M_n^i(y) - y(a - y^2) \frac{d}{dy} M_n^i(y) = -n M_{n-1}^i(y)$$

(Gihman i Skorohod 1972, „Stochastic Differential Equations”) z warunkami brzegowymi $M_n^1(0) = 0$ oraz $M_n^2(0) = 0$. Korzystając z metody punktu siodłowego (ang. saddle point technique) oszacowano rozwiązania powyższego równania. Dla $n = 1$ otrzymano:

$$M_1^1(y) \cong M_1^1(-\sqrt{a}) \cong (\pi/a\sqrt{2})\exp(a^2/2\varepsilon^2) \quad M_1^2(y) \cong 2[M_1^1(-\sqrt{a})]^2 \cong (\pi^2/a^2)\exp(a^2/\varepsilon^2)$$

Z powodu symetrii mamy

$$M_1^2(\sqrt{a}) = M_1^1(-\sqrt{a}).$$

Z powyższych równań widzimy, że wariancja czasu opuszczenia stanu jest prawie równa średniej czasu opuszczenia stanu. Zatem nie może być żadnego istotnego pików w spektrum mocy x .

Własności równania Langevina (2)

Równanie Langevina z okresowym wymuszeniem (2)

$$dx = [x(a - x^2) + A\cos\Omega t]dt + \varepsilon dW$$

Interesuje nas przypadek, gdy A jest małe w porównaniu do $a^{3/2}$. Aby zrozumieć efekt wymuszenia okresowego spójrzmy na równanie (2) dla $t = 0$ oraz $t = \pi/\Omega$. Otrzymano dwa niezależne od czasu równania stochastyczne:

$$dx = [x(a - x^2) + A]dt + \varepsilon dW \quad dx = [x(a - x^2) - A]dt + \varepsilon dW$$

Podobnie, jak równanie (1), równania te mają dwa punkty stabilne oraz jeden punkt niestabilny. Jednak nie ma już symetrii pomiędzy czasami opuszczenia dwóch basenów przyciągania.

Własności równania Langevina (2)

Niech x'_i będzie punktem stałym równania

$$dx = [x(a - x^2) + A]dt + \varepsilon dW$$

a x''_i punktem stałym równania

$$dx = [x(a - x^2) - A]dt + \varepsilon dW$$

Postępując podobnie jak poprzednio, otrzymano:

$$\mu(x'_1) \cong \frac{\pi}{a\sqrt{2}}\exp(\sqrt{a^2}2\varepsilon^2(1 + \frac{4A}{a^{3/2}})) \quad \nu(x''_1) \cong \frac{\pi}{a\sqrt{2}}\exp(\sqrt{a^2}2\varepsilon^2(1 - \frac{4A}{a^{3/2}}))$$

gdzie $\mu(x'_1)$ i $\nu(x''_1)$ to średnie czasy opuszczenia basenów przyciągania, do których należą x'_1 i x''_1 . Wraz z upływem czasu, prawdopodobieństwo opuszczenia basenu przyciągania wzrasta i osiąga maksimum dla $t = \pi/\Omega$.

Własności równania Langevina (2)

Średni czas opuszczenia basenu przyciągania τ , wówczas

$$\nu(x''_1) < \tau < \mu(x'_1)$$

Teraz jeśli

$$\mu(x'_1) \geq \pi/\Omega \quad \text{i} \quad \nu(x''_1) \ll \pi/\Omega,$$

wówczas $\tau \approx \pi/\Omega$, a wariancja czasu opuszczenia jest rzędu $\nu(x''_1)$. Z prawdopodobieństwem 1, rozwiązanie równania (2) z warunkiem początkowym $x = x'_1$ w chwili $t = 0$ skoczy do punktu $x = x''_1$ w chwili $t = \pi/\Omega$. Można sprawdzić, że rozwiązanie spędzi około π/Ω w nowym basenie przyciągania i w chwili $t = 2\pi/\Omega$ skoczy do punktu x'_1 . W tym przypadku $x(t)$ będzie skakać pomiędzy dwoma stabilnymi stanami niemal okresowo zgodnie z okresowym wymuszeniem.

Własności równania Langevina (2)

Gdy $\mu(x'_1) \geq \pi/\Omega$ i $\nu(x''_1) \ll \pi/\Omega$,

widać, że, aby spełnione były nierówności, wariancja szumu musi być zawarta w przedziale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, gdzie ε_1 i ε_2 są dane przez

$$\varepsilon_1 = a \left(\frac{1-4A/a^{3/2}}{2\ln(2\sqrt{2}a/\Omega)} \right)^{1/2} \quad \varepsilon_2 = a \left(\frac{1+4A/a^{3/2}}{2\ln(2\sqrt{2}a/\Omega)} \right)^{1/2}$$

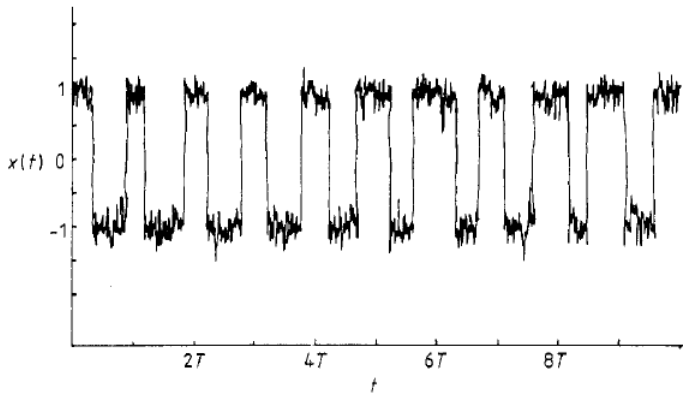
gdzie dla

$$\varepsilon = \varepsilon_1, \quad \nu(x''_1) = \pi/\Omega$$

i dla

$$\varepsilon = \varepsilon_2, \quad \mu(x'_1) = \pi/\Omega$$

Wykres



Numeryczna symulacja równania (2) z $a = 1$, $A = 0,12$, $\Omega = 2\pi/T = 10^{-3}$ i $\varepsilon = 0,25$. Otrzymano $\varepsilon_1 = 0,18$ oraz $\varepsilon_2 = 0,31$, $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Innymi słowy dla danej wartości A , malej w porównaniu z $a^{3/2}$, struktura mocy $x(t)$ wykazuje pik w częstotliwości, kiedy ε jest zawarty pomiędzy wartościami ε_1 i ε_2 .

To jest to, co nazywam rezonansem stochastycznym.

Rezonans stochastyczny dla układu Lorenza

Układ Lorenza

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned}$$

gdzie $\sigma=10$, $b = \frac{8}{3}$.

Dla $r > r_c = 24,74$ układ wykazuje zachowanie chaotyczne. Badamy występowanie rezonansu stochastycznego w układzie deterministycznym, którego rozwiązanie zbiega asymptotycznie do dziwnego atraktora.

Układ Lorenza był używany przez wielu autorów, jako prototyp przejścia do chaosu w deterministycznych układach dynamicznych, a także do turbulencji i dynamiki laserowej.

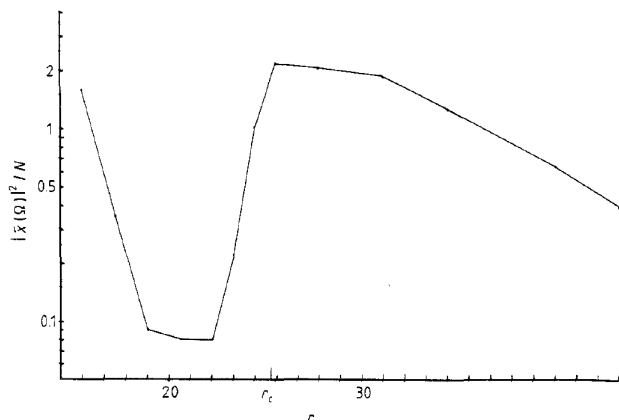
Układ Lorenza z wymuszeniem

Zbadamy efekt małego okresowego wymuszenia $A \cos \Omega t$ na układ Lorenza w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz + A \cos \Omega t \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned}$$

gdzie $A = 30$ i $\Omega = 1$.

Obliczamy transformatę Fouriera $\tilde{x}(\omega)$ dla $x(t)$. Dla $r > r_c$ istnieje wyraźny pik w $|\tilde{x}(\omega)|^2$ dla $\omega = \Omega$.



SR w układzie Lorenza z wymuszeniem

Na rysunku widać $|\tilde{x}(\omega)|^2$ jako funkcję r . Dla $r > r_c$ mamy nagłe przejście do rezonansu stochastycznego.

Wykres $|\tilde{x}(\omega)|^2/N$ względem r dla układu Lorenza z wymuszeniem. N jest czynnikiem normalizującym wybranym przypadkowo. Zauważmy, że małe zmiany wartości r okresowego wymuszenia są wysytarczająco duże do wyprodukowania okresowych oscylacji pomiędzy dwoma stabilnymi stanami. Dla wzrastającej wartości efekt okresowego wymuszenia jest zmniejszonym jak $r^{-3/2}$. Nagły skok $|\tilde{x}(\omega)|^2$ koło r_c jest spowodowany zatem przejściem do stochastycznego układu Lorenza.

Teoria rezonansu stochastycznego dla układu Lorenza nie może być rozwijana analitycznie, tak jak w przypadku pierwszego równania. Jednak, jakościowa dyskusja może być przeprowadzana.

4 Artykuł 2

„Stochastic resonance in an autonomous system with a nonuniform limit cycle”

- **Stochastic resonance in an autonomous system with a nonuniform limit cycle**, W. Rappel, S. Strogatz, *Physical Review E*, October 1994, Vol. 50, No. 4
- badanie rezonansu stochastycznego w autonomicznym układzie z niejednorodnym cyklem granicznym

Rozważmy układ, zapisany we współrzędnych biegunowych

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) + q_1(t) \\ \dot{\theta} &= b - r^2 \cos(2\theta) + q_2(t)\end{aligned}$$

b – parametr kontrolny $q_1(t)$, $q_2(t)$ – wyrazy odpowiedzialne za biały szum

Własności układu przy braku obecności szumu

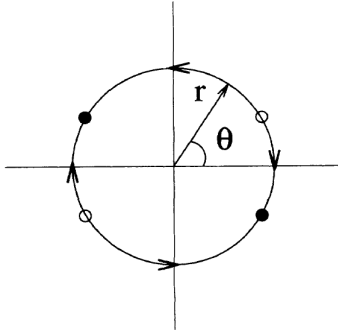
$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= b - r^2 \cos(2\theta)\end{aligned}$$

Portret fazowy zależy wówczas od b w następujący sposób:

- dla $b > 1$ układ ma stabilny cykl graniczny przy $r = 1$ z okresem $\int_0^{2\pi} d\theta / [b - \cos(2\theta)]$
- dla $b < 1$ – cykl graniczny nie istnieje, w zamian za to mamy cztery punkty na okręgu o promieniu $r = 1$ z $\theta = \pm \frac{1}{2} \arccos(b)$. Dwa z tych punktów są stabilne, a pozostałe dwa niestabilne. Stabilne i niestabilne punkty zbiegają do siebie, gdy b zmierza do 1.
- dla $b = 1$ punkty zderzają się i zanikają dla $b > 1$

Portret fazowy układu

Portret fazowy układu z dwoma stabilnymi punktami (zamalowane okręgi) oraz dwoma niestabilnymi (niezamalowane) i przepływ na okręgu o promieniu $r = 1$.



Własności układu dla $b < 1$

Dla $b < 1$:

- gdy nie ma szumu, układ osiadzie w jednym z dwóch stabilnych punktów
- efektem szumu jest wyprowadzenie układu ze stabilnego punktu
- gdy b jest bliskie 1, stabilne i niestabilne punkty są blisko siebie – jeśli szum jest wystarczająco silny, układ może czasami być wypchnięty daleko na stronę niestabilnego punktu, po czym popłynie gwałtownie wokół okręgu w kierunku drugiego punktu stabilnego
- ten sam scenariusz może mieć miejsce wokół drugiego punktu
- to prowadzi do ruchu wokół okręgu z określoną częstotliwością
- wzrost szumu powoduje wzrost częstotliwości – układ będzie wyrzucany częściej i tym samym omijał najwolniejszą część okręgu

Własności układu dla $b < 1$

Zasymulujemy równanie:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= b - r^2 \cos(2\theta) + q_2(t)\end{aligned}$$

- symulujemy tylko ruch układu na okręgu $r = 1$
- szum jest generowany przez wybranie losowej liczby z rozkładu jednostajnego pomiędzy -1 a 1 a następnie pomnożenie jej przez siłę szumu D
- numerycznie całkujemy układ, korzystając z metod takich jak w artykule Gang, Ditzinger, Ning, Haken, Phys. Rev. Lett 71, 807 (1993) i obliczamy pozycję ω_p pików w spektrum mocy
- dla małej siły szumu, ω_p wzrasta w przybliżeniu liniowo wraz z D

Dla uproszczenia dodaliśmy szum tylko do równania na θ ($q_1 = 0$).

Tak jak można oczekiwać z argumentacji powyżej, jeśli dwukrotnie zwiększymy siłę szumu, można oczekiwać, że układ będzie wypchnięty poza ustalony stabilny punkt dwukrotnie szybciej i tym samym częstotliwość zwiększy się dwukrotnie.

Wykres

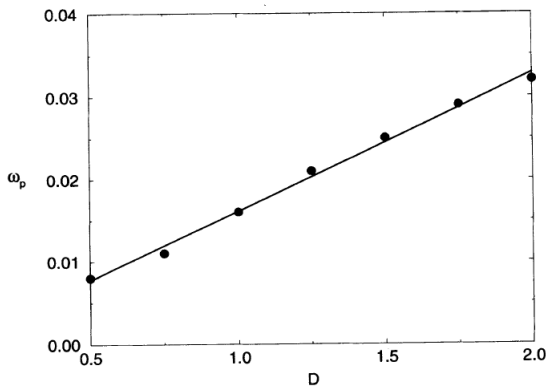
Częstotliwość ω_p pików w spektrum mocy jako funkcja siły szumu D dla $b = 0.99$

Własności układu dla $b > 1$

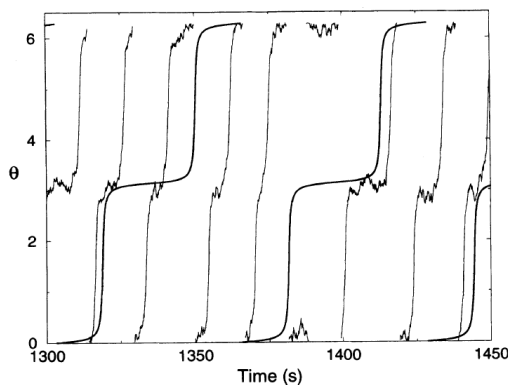
Dla $b > 1$:

- przypuśćmy, że układ ma cykl graniczny
- bez szumu i dla b bliskiego 1, ruch wokół cyklu granicznego jest wysoce niejednorodny – układ spędza długi czas przechodząc przez wolne regiony dla $\theta = 0$ i $\theta = \pi$, które są „duchami” byłych ustalonych punktów
- efektem szumu jest częstsze pomijanie przez układ wolnych regionów
- częstotliwość wzrasta w obecności szumu

Częstotliwość zmiany pików jest także wyjaśniona przez powyższy obrazek.



Szereg czasowy układu



Szereg czasowy dla θ , w przypadku cyklu granicznego ($b = 1.005$). Gruba linia – brak szumu, cienka – $D = 0.01$.

Komentarz do wykresu – układ spędza relatywnie dużo czasu wokół $\theta = 0$ i $\theta = \pi$, W sytuacji, gdy dodamy szum układ spędza mniej czasu w wolnych regionach cyklu granicznego i zatem częstotliwość rośnie.

Chociaż układ przebadany tutaj ma dwa wolne regiony (z racji symetrii modelu), te same efekty pojawią się, nawet jeśli, byłby tylko jeden taki region. Istotną własnością modelu jest to, że bifurkacja siodło-węzeł pojawia się na niezmienniczym cyklu, tym samym tworząc cykl graniczny wzdłuż którego ruch jest silnie niejednorodny. Ten mechanizm tworzenia cyklu granicznego jest znany jako nieskończenie okresowa bifurkacja; jest ona popularna w fizycznych, biologicznych i chemicznych układach.

Efekty badane tutaj powinny być obserwowane eksperymentalnie w różnych układach. Z drugiej strony, nie powinno się oczekiwać znajdowania tego typu rezonansu stochastycznego w układach, którego oscylacje są utworzone przez bifurkację Hopfa, gdyż te układy wykazują relatywnie jednorodny ruch na ich cyklach granicznych.

Ciekawe przykłady rezonansu

1. związek równania Langevina z równaniem z mechaniki: $x'' + \beta x' + F(x) = -g + \lambda \sin(\omega t)$

2. Tacoma Bridge:

Most Tacoma

Katastrofa mostu w Tacoma 7 listopada 1940 stanowi wzorcowy przykład znaczenia wpływu parcia wiatru na konstrukcję jako oddziaływania dynamicznego, które należy uwzględnić podczas projektowania konstrukcji tego typu.

Most wiszący w Tacoma miał główne przęsło o długości 840 m przy szerokości jedynie 12 m, co było powodem jego niebywalej wiotkości. Już w trakcie budowy, podczas montażu deskowania dla zabetonowania jezdnii, pracujący robotnicy doznawali mdłości wynikających z dużych ugięć mostu. Po oddaniu do eksploatacji, stał się on prawdziwą atrakcją turystyczną, ze względu na niesamowite wrażenia towarzyszące przejazdowi przez most, tak iż nazwany został potocznie "galopującą Gertie".

Po czterech miesiącach istnienia, rano 7 listopada 1940 r. silny sztorm wiejący od oceanu (56-67 km/h), spowodował wprowadzenie mostu w drgania. Początkowo (godz. 7:00), był to ruch pomostu w płaszczyźnie pionowej (podnoszenie i opadanie o amplitudzie ok. 90 cm z częstością 36 razy na minutę), później ok. godz. 10:00 rytmiczne wznoszenie i opadanie zamieniło się w dwufalowy ruch skręcający 14 cykli na minutę z wychyleniem do 8,4 m, przy skręceniu dochodzącym do 45 stopni. Ok. 10:30 nastąpiło pierwsze

załamanie jednej z płyt pomostu, a ok. 11:00 most rozpadł się ostatecznie. Nie było ofiar w ludziach. Przebieg katastrofy został zarejestrowany na taśmie filmowej.

Powodem katastrofy mostu, oprócz wymienionej małej sztywności przęsła, była także niewystarczająca stateczność aerodynamiczna i związana z nią nieszczęśliwa zbieżność częstości własnej drgań przęsła i pylonów (zjawisko rezonansu).

Most został odbudowany według zmodyfikowanego projektu i otwarty ponownie 15 października 1950.

3. *Millenium Bridge w Londynie:*

Otwarcie mostu Millenium Bridge w Londynie

W skrócie

SR w układzie wzrokowym

Millennium Bridge jest mostem wiszącym dla pieszych, który łączy dzielnice Bankside z City of London.

Most zbudowany został głównie ze stali i aluminium, składa się z trzech głównych części 81m, 144m i 108m. Jego ciężar podtrzymywany jest przez 8 lin nośnych.

Most był otwierany dwukrotnie. Dwa dni po jego pierwszym otwarciu (10 czerwca 2000) został zamknięty ze względu na silne wibracje przy dużej liczbie użytkowników. Postanowiono tymczasowo otworzyć obiekt i wprowadzić kolejki. Ostatecznie most przebudowano i otwarto 22 lutego 2002, a jego budowa pochłonęła ponad 23 miliony funtów.

4. *Ludzie poddani mechanicznej stymulacji opuszków palców są zdolni do wykrycia podprogowego sygnału w obecności zaszumionych mechanicznych wibracji. Procent poprawnych detekcji obecności sygnału byz zmaksymalizowany dla określonych wartości szumu.*

Dziękuję!