Quantal response equilibrium

Elżbieta Kukla

9 maja 2012

Gra w orła i reszkę („Matching pennies”)

	L	R
T	$-1, 1$	$1, -1$
B	$1, -1$	$-1, 1$

Oczekiwane wypłaty gracza wierszowego:

$$U_T = -1 \cdot (1 - p_R) + 1 \cdot p_R = 2p_R - 1$$

$$U_B = 1 \cdot (1 - p_R) + (-1) \cdot p_R = 1 - 2p_R$$

Zatem $U_T > U_B \Leftrightarrow p_R > \frac{1}{2}$.
Podobnie gracz kolumnowy $(U_R > U_L \Leftrightarrow p_T < \frac{1}{2})$.

Gra w orła i reszkę

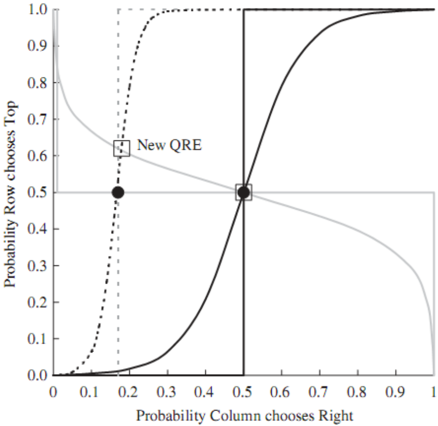

Figure 1 Players' best responses and quantal responses for a generalized matching pennies game

Gra w orła i reszkę

	L	R
T	$-1, 1$	$9, -1$
B	$1, -1$	$-1, 1$

Oczekiwane wypłaty gracza wierszowego:

$$U_T = -1 \cdot (1 - p_R) + 9 \cdot p_R = 10p_R - 1$$

$$U_B = 1 \cdot (1 - p_R) + (-1) \cdot p_R = 1 - 2p_R$$

Zatem $U_T > U_B \Leftrightarrow p_R > \frac{1}{6}$.
Gracz kolumnowy – tak jak poprzednio: $U_R > U_L \Leftrightarrow p_T < \frac{1}{2}$.

Gra w orła i reszkę

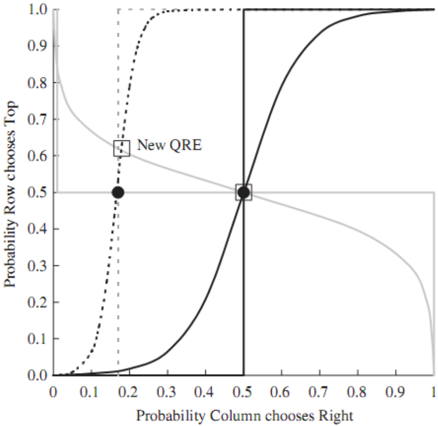

Figure 1 Players' best responses and quantal responses for a generalized matching pennies game

Quantal response function

Funkcja powinna być

- rosnąca
  (im większa oczekiwana wypłata, tym większe prawdopodobieństwo wyboru strategii)
- gładka

Przykładowo dla $i = 2$:

$$\mathbb{P}(T) = \frac{f(U_T)}{f(U_T) + f(U_B)}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{f(U_B)}{f(U_T) + f(U_B)}$$

Np. $f(U_i) = \exp(\lambda U_i)$, $i = T, B$.

QRE

Quantal response equilibrium

Richard McKelvey, Thomas Palfrey – „Quantal Response Equilbrium in Normal Form Games”, 1995

- doskonała racjonalność graczy zastąpiona jest ograniczoną racjonalnością
- każda strategia jest grana z dodatnim prawdopodobieństwem
- strategia z wyższą oczekiwaną wypłatą jest grana częściej
- uogólnienie równowagi Nasha:
  - $\lambda \rightarrow \infty$ – zbiega do równowagi Nasha
  - $\lambda \rightarrow 0$ – losowo
- wyniki pokrywają się z danymi z eksperymentów

Definicje

- $G = (N, S_1, \ldots, S_n, \pi_1 \ \ldots, \pi_n)$ – gra o postaci normalnej
- $N = \{1, \ldots, n\}$ – zbiór graczy
- $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{iJ(i)}\}$ – zbiór strategii i-tego gracza
- $S = S_1 \times \ldots \times S_N$ – zbiór profilów strategii
- $\pi_i : S_i \to R$ – funkcja wypłat i-tego gracza

Oznaczenia

- $\Sigma_i = \Delta^{J(i)}$ – zbiór rozkładów prawdodpodobieństw nad S_i
- $\sigma_i \in \Sigma_i$ – strategia mieszana, która jest przekształceniem z S_i do Σ_i, gdzie
  $\sigma(s_i)$ – prawdopodobieństwo, że gracz i wybierze strategie czystą s_i
- $\Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_N$ – zbiór profilów strategii mieszanych
- $\pi_i(\sigma) = \Sigma_{s \in S} p(s) \pi_i(s)$ – oczekiwana wypłata i-tego gracza, jeśli profil strategii mieszanych to $\sigma \in \Sigma$, gdzie
  $p(s) = \prod_{i \in N} \sigma_i(s_i)$ – rozkład prawodpodobieństwa nad profilami czystych strategii indukowany przez σ.
- P_{ij} – prawdopodobieństwo, że i-ty gracz wybiera j-tą strategię

Własności

Regularna „quantal response”

$P_i : R^{J(i)} \to \Delta^{J(i)}$ jest regularną funkcją „quantal response”, jeśli spełnia ona nastepujące cztery warunki

1. **wewnętrzność** (interiority)
   tzn. $P_{ij}(\pi_i) > 0 \ \forall j = 1, \ldots, J(i)$ oraz $\forall \pi_i \in R^{J(i)}$
   (model ma pełna dziedzinę)
2. **ciągłość** (continuity)
   tzn. $P_{ij}(\pi_i)$ jest różniczkowalną w sposób ciągły funkcją dla wszystkich $\forall \pi_i \in R^{J(i)}$
   (P_i jest niepusty i jednowartościowy; dowolnie małe zmiany oczekiwanych wypłat nie powinny prowadzić do skoków w prawdopodbieństwach wyboru)

Własności

1. **wewnętrzność** (interiority)
2. **ciągłość** (continuity)
3. **reakcyjność** (responsiveness)
   $\partial P_{ij}(\pi_i)/\partial \pi_{ij} > 0 \ \forall j = 1 \ldots, J(i)$ and $\forall \pi_i \in R^{J(i)}$
   (jeśli oczekiwana wypłata ze strategii rośnie, prawdopodobieństwo wyboru musi również wzrosnąć)
4. **monotoniczność** (monotonicity)
   $\pi_{ij} > \pi_{ik}$ implikuje, że $P_{ij}(\pi_i) > P_{ik}(\pi_i) \ \forall j, k = 1, \ldots, J(i)$
   (strategia z wyższymi wypłatami jest wybierana częściej niż strategia z niższymi wypłatami)

Definicja 2

Zdefiniujmy $P(\pi) = (P_1(\pi_1), \ldots, P_n(\pi_n))$. P jest regularna, jeśli każde P_i spełnia aksjomaty regularności.
Ponieważ $P(\pi) \in \Sigma$ i $\pi = \pi(\sigma)$ jest zdefiniowane dla każdego $\sigma \in \Sigma$, $P \circ \sigma$ definiuje przekształcenie z Σ na siebie (z warunku drugiego $P \circ \sigma$ jest przekształceniem ciągłym).

Regular QRE

Niech P będzie regularna. Regularna QRE gry G w postaci normalnej jest mieszanym profilem strategii σ^* takim że $\sigma^* = P(\sigma^*)$.

Twierdzenie

Istnieje regularne QRE gry G dla dowolnego regularnego P.
(wynika to bezpośrednio z twierdzenia Brouwera o punkcie stałym)

Podsumowanie

Równowaga Nasha a QRE

- QRE ma zwykle inną wartości niż NE (wyjątkiem jest symetryczna NE)
- aby znaleźć równowagę trzeba rozwiązać:
  - NE – dwa równania liniowe, mieszana strategia gracza 2 determinowana jest tylko przez wypłaty gracza 1
  - QRE – dwa nieliniowe równania, oba zależą od wypłat obu graczy
- Zmiana wypłat gracza 1 nie ma wpływu na jego mieszaną NE, ale wpływa na QRE.