

# Chaos, fraktale i statystyka

Bogumiła Koprowska

Elżbieta Kukla



# Artykuł

## Chaos, Fractals and Statistics

Sangit Chatterjee i Mustafa R. Yilmaz

*Statistical Science*

(Vol. 7, No. 1, Feb. 1992, pp.49-68)

# O czym będzie mowa?

- odwzorowanie logistyczne i trójkątne („tent map”)
- zbiór Mandelbrota, zbiór Julii, fraktale, atraktory
- w jakich warunkach pojawia się chaos?
- różne wymiary fraktalne, związki zachodzące między nimi; ich użycie w mierzeniu zjawiska chaosu; estymacja wymiarów
- zastosowania układów dynamicznych, nieliniowych w różnych dziedzinach nauki



# Odzworowanie logistyczne

## Odzworowanie logistyczne

$$x_{t+1} = \omega x_t(1 - x_t)$$

gdzie  $0 \leq x_t \leq 1$ ,  $0 \leq \omega \leq 4$

### Zachowanie odzworowania logistycznego dla różnych $\omega$ :

- $0 < \omega \leq 1$ : istnieje tylko jeden punkt stacjonarny  $\beta_0 = 0$  (przyciągający)
- $1 < \omega \leq 3$ : obok punktu  $\beta_0 = 0$  (odpychający) pojawia się drugi punkt stały  $\beta_1 = 1 - \frac{1}{\omega}$  (przyciągający)
- $3 < \omega \leq 1 + \sqrt{6}$ :  $\beta_1$  (punkt odpychający), poza tym tworzy się cykl długości 2, złożony z punktów  $\beta_2^{1/2} = \frac{\omega+1 \pm \sqrt{\omega^2-2\omega-3}}{2\omega}$
- $1 + \sqrt{6} < \omega$ : cykl długości 2 staje się odpychający i tworzy się cykl długości 4, kolejne podwajanie długości cyklu następuje aż do  $\omega \approx 3,574$













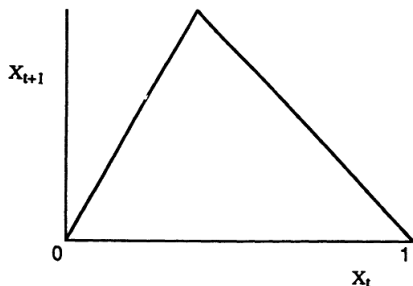




# Odwzorowanie trójkątne

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_t/\omega, & \text{for } 0 \leq x_t < \omega, \\ (1 - x_t)/(1 - \omega), & \text{for } \omega \leq x_t \leq 1, \end{cases}$$

$\omega$  jest stałą  $0 < \omega < 1$ ,  $x_t \in [0, 1]$



# Odwzorowanie trójkątne

## Jak otrzymać odwzorowanie trójkątne z odwzorowania logistycznego?

Odwzorowanie logistyczne z  $\omega = 4$ ,  $x_n \in [0, 1]$

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$$

- Podstawienie:  $x_n = \sin^2 \theta_n$  z  $\theta_n \in [0, \pi/2]$
- $\sin^2 \theta_{n+1} = 4\sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n = \sin^2(2\theta_n)$
- Chcemy aby  $\theta \in [0, \pi/2]$ , zatem przyjmujemy:

$$\theta_{n+1} = \begin{cases} 2\theta_n & \text{gdy } 0 \leq \theta_n \leq \pi/4 \\ \pi - 2\theta_n & \text{gdy } \pi/4 < \theta_n \leq \pi/2 \end{cases}$$

- Podstawienie  $y_n = 2\theta_n/\pi$  (aby dostać  $y_n \in [0, 1]$ )

# Odzworowanie trójkątne

- Dostajemy:

$$f(y_n) = y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n & \text{gdy } 0 \leq y_n \leq 1/2 \\ 2(1 - y_n) & \text{gdy } 1/2 < y_n \leq 1 \end{cases}$$

- Popatrzmy na rozwinięcie dwójkowe  $y_n$ :

$y_n = a_0.a_1a_2a_3a_4 \dots$ , gdzie  $y_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^{-j}$ .

Podwojenie  $y_n$  odpowiada przesunięciu przecinka o jedno miejsce w prawo:

$$\begin{aligned} y_n &= a_0.a_1a_2a_3a_4 \dots, \\ 2y_n &= a_1.a_2a_3a_4a_5 \dots \end{aligned}$$

# Odzworowanie trójkątne

- Oznaczmy  $\bar{a} = 1$ , gdy  $a = 0$  oraz  $\bar{a} = 0$ , gdy  $a = 1$ ; zauważmy, że:

$$(2 - 2y_n) = 2 - a_1.a_2.a_3.a_4.a_5 \dots = \bar{a}_1.\bar{a}_2.\bar{a}_3.\bar{a}_4.\bar{a}_5 \dots$$

- Dla  $y \in [0, 1]$  mamy zawsze  $a_0 = 0$  (1 to  $0.(1)^\infty$ ).  
Używamy notacji  $(r_1 \dots r_n)^\infty$  do zaznaczania, że  $r_1 \dots r_n$  powtarza się nieskończenie wiele razy.
- Jeśli  $y_n < 1/2$ , to  $a_1 = 0$ , więc  $y_{n+1} = 0.a_2.a_3.a_4.a_5 \dots$   
Jeśli  $y_n \geq 1/2$ , to  $a_1 = 1$ , więc  
 $y_{n+1} = 2 - 1.a_2.a_3.a_4.a_5 \dots = 0.\bar{a}_2.\bar{a}_3.\bar{a}_4.\bar{a}_5 \dots$



# Odzworowanie trójkątne

- Jeśli  $y_n = 0.a_1a_2a_3a_4\dots$ , to mamy przekształcenie

$$y_{n+1} = \begin{cases} 0.a_2a_3a_4a_5\dots & \text{dla } a_1 = 0 \\ 0.\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4\bar{a}_5\dots & \text{dla } a_1 = 1 \end{cases}$$

Rozważmy trzy przypadki:

- $y_0$  niewymierne – orbita rozpoczynająca się w  $y_0$  nie jest periyodyczna
- $y_0$  wymierne o skończonym rozwinięciu dwójkowym  
 $y_0 = 0.a_1\dots a_n$ ,  $y_j = 0$  dla wszystkich  $j \geq n$  – orbita kończy się w zerze po skończonej liczbie iteracji
- $y_0$  wymierne o nieskończonym, okresowym rozwinięciu dwójkowym

# Odzworowanie trójkątne

- $y_0$  wymierne o nieskończonym, okresowym rozwinięciu dwójkowym

$$y_0 = 0.b_1b_2b_3b_4b_5 \dots b_n(a_1a_2 \dots a_m)^\infty$$

$$y_1 = 0.\overline{b_2b_3b_4b_5 \dots b_n}(a_1a_2 \dots a_m)^\infty \text{ lub}$$

$$0.\overline{b_2b_3b_4b_5 \dots b_n}(\overline{a_1a_2 \dots a_m})^\infty \text{ itd.}$$

$$y_n = 0.(a_1a_2 \dots a_m)^\infty \text{ lub } 0.(\overline{a_1a_2 \dots a_m})^\infty$$

Co dzieje się gdy  $y_n = 0.(a_1a_2 \dots a_m)^\infty$ ?

$$f^m(y_n) = y_n \text{ lub } f^m(y_n) = \bar{y}_n$$

W drugim przypadku, ponieważ  $f(\bar{y}) = f(y)$  dla każdego  $y$ , to

$$f^m(y_{n+1}) = f^m(f(y_n)) = f(f^m(y_n)) = f(\bar{y}_n) = f(y_n) = y_{n+1}$$

- Wniosek: każda liczba wymierna leży na orbicie periodycznej; żadna z nich nie jest stabilna - np. weźmy

$$y_0 = 0.a_1a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots \text{ i } z_0 = 0.a_1a_2 \dots a_n b_{n+1} \dots,$$

$$a_{n+1} \neq b_{n+1}.$$







# Stała Feigenbauma

## Stała Feigenbauma

Mitchell Feigenbaum w 1978 r. zbadał granicę wyrażenia:

$$\delta_n = \frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{\omega_{n+1} - \omega_n}$$

$n = 1, 2, \dots$ ,  $\omega_n$  -  $n$ -ty punkt bifurkacji.

$\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4.669201609 \dots$  – **stała Feigenbauma**



# Historia

## Historia badań nad nieliniowymi układami dynamicznymi i chaosem:

- 1899 – analiza układów planetarnych, Poincaré
- 1963 – początkowo niedoceniona praca Lorenza dotycząca meteorologii
- lata 70. i 80. XX wieku – eksplozja zainteresowania tą tematyką



# Praca Lorenza

**Edward Lorenz** opublikował w 1963 r. pracę pt. *Deterministic Nonperiodic Flow* w *Journal of the Atmospheric Sciences*.

**Streszczenie artykułu Lorenza:** *Można sformułować skończone układy nieliniowych deterministycznych równań różniczkowych zwyczajnych, opisujących wymuszony, dyssypatywny przepływ hydrodynamiczny. Rozwiązania tych równań mogą być utożsamione z trajektoriami w przestrzeni fazowej. Dla układów z ograniczonymi rozwiązaniami stwierdzono, że rozwiązania nieokresowe są niestabilne w stosunku do małych odkształceń, tak że stany początkowe różniące się nieznacznie mogą rozwijać się w stany znacznie różne od siebie. Pokazano, że układy o ograniczonych rozwiązaniach mają ograniczone rozwiązania liczbowe. Rozwiązano numerycznie prosty układ przedstawiający konwekcję komórkową. Wykryto, że wszystkie z rozwiązań są niestabilne i że prawie wszystkie są nieokresowe. Zbadano możliwość dokonywania bardzo długoterminowych prognoz pogody w świetle tych rezultatów.*



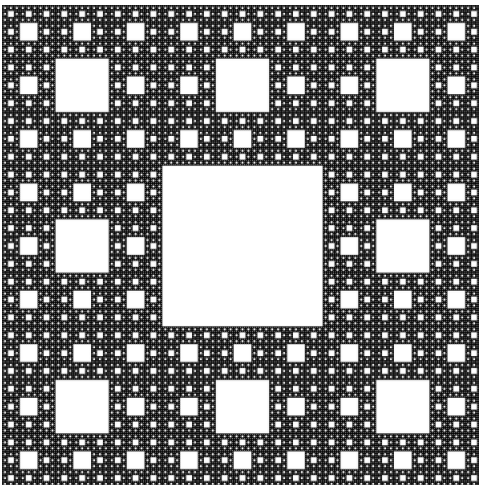








# Dywan Sierpińskiego



Wymiar fraktalny:  $\frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,893$ .

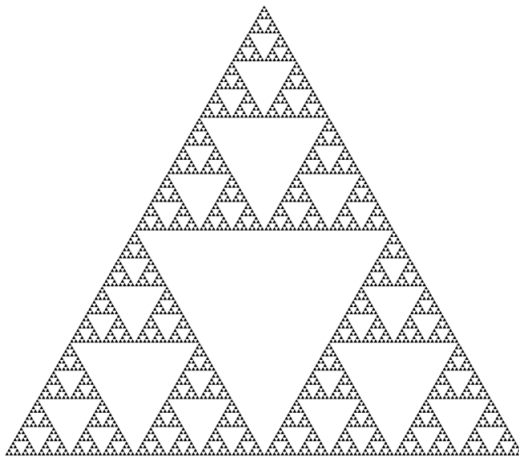
# Trójkąt Sierpińskiego



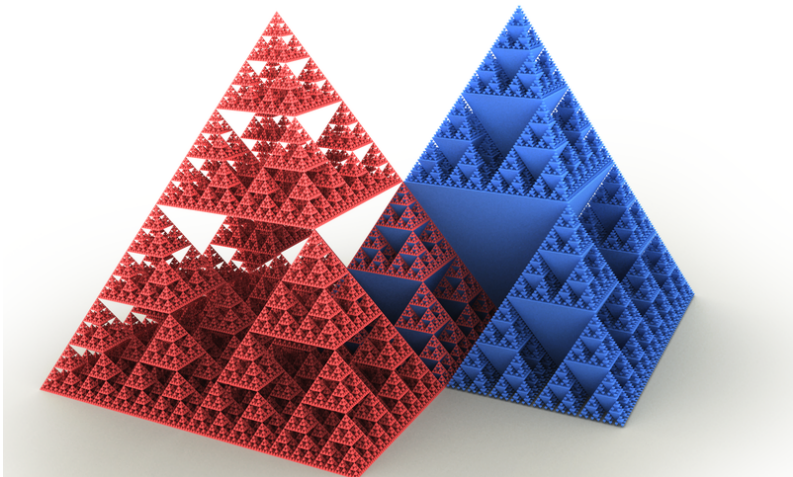
Wymiar fraktalny:  $\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585$ .



# Trójkąt Sierpińskiego



# Piramida Sierpińskiego



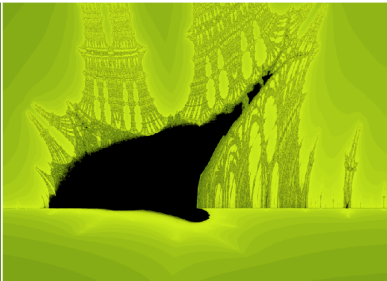
Wymiar fraktalny:  $\frac{\log_4}{\log_2} = 2$ .







# Płonący statek





# Model ewolucyjny

## Model ewolucyjny:

- model ciągły:

$$\dot{x} = f_{\omega}(x(t))$$

- model dyskretny:

$$x_{t+\tau} = f_{\omega}(x_t)$$

gdzie  $\tau$  jest pewnym określonym przyrostem czasu.



# Atraktor

## Definicje

$A$  nazywany jest **zbiorem atraktującym (atraktorem)** z podstawowym otoczeniem  $U$ , jeśli:

- $\forall t \ f_\omega^t(A) = A$
- $\forall V \supset A$ ,  $V$ -otwarty mamy  $f_\omega^t(U) \subset V$  dla dostatecznie dużego  $t$   
Suma zbiorów  $(f_\omega^t)^{-1}(U)$  dla każdego  $t$  nazywana jest **basenem atraktorów  $A$** .





# 1. Własności $f_\omega$ , $\omega$ , $x_0$

## Wyniki Li i Yorke (1975)

- $f_\omega$  jest ciągła,  $\hat{x}$  punkt okresowy o okresie 3,  
 $\Rightarrow \hat{x}$  punkt okresowy z każdym innym okresem  $k = 1, 2, \dots$
- nieprzeliczalny zbiór punktów początkowych prowadzących do chaosu

## Jacobson(1981)

- dla modelu logistycznego:
  - zbiór wartości parametru  $\omega$ , które dają chaotyczny atraktor ma dodatnią miarę
- dla modelu namiot:
  - prawie wszystkie  $\omega \in (0, 1)$  dają chaotyczne trajektorie











## 3. Obserwacja atraktorów w praktyce

- rekonstrukcja z opóźnieniem
  - obserwujemy  $y_t = h(x_t)$ , gdzie  $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
  - zapisujemy  $\omega_t = (y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+m-1})$
  - $\omega_t$  ma podobne własności do  $x_t$ , o ile  $m \geq 2D + 1$ ,  $D$ -wymiar fraktalny

# Wymiary i ich szacowanie







# Wymiar Lapunowa

- dla  $f_\omega : R^n \rightarrow R^n$  mamy:
  - $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
  - $\lambda_i < 0$ : średni wskaźnik kontrakcji w kierunku odpowiedniego wektora własnego
  - $\lambda_i > 0$ : powtarzaną ekspansję w kierunku odpowiedniego wektora własnego
- układ dyssypatywny:
  - $\exists_i \lambda_i < 0$
  - $\sum_i \lambda_i < 0$
- warunek chaotyczności układu:  $\exists_i \lambda_i > 0$

## Wymiar Lapunowa

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}$$

$$j = \operatorname{argmax}_j \{ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0 \}$$









# Zastosowania















# Dziękujemy!