0.1 Artykuł

Chaos, Fractals and Statistics, autorzy: Sangit Chatterjee i Mustafa R. Yilmaz. Artykuł pochodzi z czasopisma "Statistical Science" (Vol. 7, No. 1, Feb. 1992, pp.49-68).

0.2 Streszczenie

O czym będzie mowa?

- różnorodnych zastosowaniach układów dynamicznych w różnych dziedzinach nauki
- pojawienie się chaosu i fraktali z iteracji prostych równań różniczkowych
- pojęcie przestrzeni fazowej, przekształcenia zwężającego, atraktora, gęstości niezmienniczej, związek twierdzenia ergodycznego z układami dynamicznymi
- różnorodne pomysły dotyczące wymiarów i związków zachodzących między nimi; ich użycie w mierzeniu zjawiska chaosu; estymacja wymiarów
- rola jaką w przyszłości statystyka może grać w rozwoju nieliniowej dynamiki
- zaczniemy od przykładów

Pierwszy przykład

W pierwszym przykładzie, proces opisany jest odwzorowaniem logistycznym:
(1) $x_{t+1} = f(x_t) = \omega x_t(1 - x_t)$ dla $0 \leqslant x_t \leqslant 1$ i $0 \leqslant \omega \leqslant 4$.
Interesującym odkryciem dotyczącym (1) jest jego podobieństwo do zmian wysokości Hyperiona, księżyca Saturna, dla wartości ω większych niż 3.57. To, że wysokość Hyperiona waha się nieprzewidywalnie zostało odkryte przez Voyager. Zatem, fenomen, który wydaje się być losowy może być opisany przy użyciu nieliniowych deterministycznych procesów.
Model logistyczny (1) jest bardzo ważnym modelem, klasycznym przykładem prostego układu dynamicznego zachowującego się chaotycznie.
Zachowanie odwzorowania logistycznego dla różńych ω:

- $0 < \omega \leqslant 1$ – na odcinku $[0, 1]$ istnieje tylko jeden punkt stacjonarny $\beta_0 = 0$ i jest on przyciągający
- $1 < \omega \leqslant 3$ – obok punktu $\beta_0 = 0$, który jest teraz odpychający, pojawia siędrugi punkt stały $\beta_1 = 1 - \frac{1}{\omega}$, który jest przyciągający

- $3 < \omega \leqslant 1+\sqrt{6}$. Punkt β_1 staje siępunktem odpychającym, a tworzy się cykl długości 2, złożony z punktów $\beta_2^{1/2} = \frac{\omega+1\pm\sqrt{\omega^2-2\omega-3}}{2\omega}$, które znajdujemy rozwiązując równanie $f^2(x) = x$
- $1+\sqrt{6} < \omega \leqslant 0,885$ – cykle długości 2 staje się odpychający i tworzy się cykl długości 4.
- takie kolejne podwajanie długości cyklu następują aż do $\omega \approx 3,56994$). Ten proces jest przykładem kaskadowego podwajania okresu. W tym przypadku wartości ω tam, gdzie takie podwojone okresy występują są nazywane **punktami bifurkacji**.

Drugi przykład

- Drugi przykład jest ściśle powiązany z modelem logistycznym, nazywa się „tent map”, czyli odwzorowaniem „namiot”. Łatwo pokazać, w jaki sposób można go otrzymać z modelu logistycznego. Przeanalizujmy układ dynamiczny $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$, $\omega = 4$. Ten problem możemy uprościć przez odpowiednie podstawienie. Jako że $x_n \in [0,1]$, możemy przyjąc $x_n = sin^2\theta_n$, z $\theta_n \in [0,\pi/2]$. Równanie na θ_n przyjjmuje wówczas postać $sin^2\theta_{n+1} = 4sin^2\theta_n cos^2\theta_n = sin^2(2\theta_n)$. Ponieważ, chcemy aby $\theta \in [0,\pi/2]$, możemy przyjąć:

$$\theta_{n+1} = \begin{cases} 2\theta_n & \text{gdy } 0 \leqslant \theta_n \leqslant \pi/4 \\ \pi - 2\theta_n & \text{gdy } \pi/4 < \theta_n \leqslant \pi 2 \end{cases}$$

Jeśli przeskalujemy θ, podstawiając $y_n = 2\theta_n/\pi$, aby dostać $y \in [0,1]$. Dostajemy:

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n & \text{gdy } 0 \leqslant 1/2 \\ 2(1-y_n) & \text{gdy } 1/2 < y_n \leqslant 1 \end{cases}$$

(Jeśli początkową wartością jest y_0, dostajemy $y_t = 2^t y_0$). Najprostszą drogą do rozważenia dynamiki tego przekształcenia jest wypisanie rozwinięcia dwójkowego y_n, $y_n = a_0.a_1a_2a_3a_4\ldots$, gdzie $y_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^{-j}$.
Podwojenie rozwinięcia dwójkowego odpowiada przesunięciu przecinka jedni miejsce w prawo: $y = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots$, $2y = a_1.a_2a-3a_4a_5\ldots$.
Oznaczmy przez $\bar{a} = 1$, gdy $a = 0$ lub $\bar{a} = 0$, gdy $a = 1$, wówczas $2 - a_0.a_1a_2a_3a_4\ldots = \bar{a}_0.\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4\ldots$.
W obszarrze, w którym rozważamy y ($y \in [0,1]$) mamy zawsze $a_0 = 0$, zakładając że reprezentujemy jedynkę przez 0.1^∞ (używamy notacji $(r_1\ldots r_n)^\infty$ do zaznaczanie, że $r_1\ldots r_n$ powratrza się nieskończenie wiele razy. Jeśli $y_n < 1/2$, wówczas mamy też $a_1 = 0$, więc $y_{n+1} = 0.a_2a_3a_4a_5\ldots$. Jeśli $y_n \geqslant 1/2$, wówczas $a_1 = 1$ i mamy $y_{n+1} = 2 - 1.a_2a_3a_4a_5\ldots =$

$0.\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4\bar{a}_5\ldots$. Zatem możemy zapisać nasze przekształcenie:
jeśli $y_n = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots$ wówczas

$$yn+1 = \begin{cases} 0.a_2a_3a_4a_5\ldots & \text{dla } a_1 = 0 \\ 0.\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4\bar{a}_5\ldots & \text{dla } a_1 = 1 \end{cases}$$

Z przekształceniem zapisanym w ten sposób można dość łatwo zrozumieć jego dynamikę. Przypuśćmy, że y_0 jest wymierne. Wówczas jego rozwinięcie będzie albo skończone albo będzie się powtarzać (jak przy rozwinięciu dziesiętnym). Jeśli rozwinięcie jest skończone, to mamy $y_0 = 0.a_1\ldots a_n$, wówczas $y_j = 0$ dla wszystkich $j \geqslant n$ i orbita kończy się w zerze po skończonej liczbie iteracji. Jeśli rozwinięcie się powtarza wówczas $y_0 = 0.b_1b_2b_3\ldots b_n(a_1a_2\ldots a_m)^\infty$. W tym przypadku mamy:
$y_1 = 0.b_2b_3b_4b_5\ldots b_n(a_1a_2\ldots a_m)^\infty$ lub $0.\overline{b_2b_3b_4b_5\ldots b_n}(\overline{a_1a_2\ldots a_m})^\infty$
$y_2 = 0.b_3b_4b_5\ldots b_n(a_1a_2\ldots a_m)^\infty$ lub $0.\overline{b_3b_4b_5\ldots b_n}(\overline{a_1a_2\ldots a_m})^\infty$.
Po n interacjach mamy $y_n = 0.(a_1a_2\ldots a_m)^\infty$ lub $0.(\bar{(}a_1a_2\ldots a_m)^\infty$. Bez straty ogólności możemy rozważać, co dzieje się, kiedy $y_n = 0.(a_1a_2\ldots a_m)^\infty$. Teraz mamy dwie możliwości. Jedna, gdy $f^m(y_n) = y_n$, w którym to przypadku orbita powtarza się po m iteracjach; albo wszystkie zera i jedynki w y_n są zamienione i $f^m(y_n) = \bar{y}_n$. W drugim przypadku, ponieważ $f(\bar{y}) = f(y)$ dla każdego y:
$f^m(y_{n+1}) = f^m(f(y_n)) = f(f^m(y_n)) = f(\bar{y}_n) = f(y_n) = y_{n+1}$, zatem orbita powtarza się po m iteracjach po jeszcze jednym zastosowaniu f. Zatem każda liczba wymierna leży na orbicie, która jest periodyczna. Jednak, żadna z tych periodycznych orbit nie jest stabilna. Istotnie, wszystkie początkowe warunku, które nie są równe w końcu się rozdzielą, lądując po przeciwnych stronach $x = 1/2$. Przypuśćmy, że:
$y_0 = 0.a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\ldots$ i $z_0 = 0.a_1a_2\ldots a_nb_{n+1}\ldots$ z $a_{n+1} \neq b_{n+1}$, wówczas pierwsze miejsca po przecinku w $f^n(y_0)$ i $f^n(z_0)$ nie będą równe.
Jeśli y_0 jest niewymierne nie jest okresowe (i nie jest skończone). Okazuje się, że orbita rozpoczynająca się w y_0 też się nie powtarza, zatem nie może być okresowa.
Mamy w takim razie dziwną sytuacją. Nie ma orbit stabilnych ale wszystkie wymierne liczby są albo okresowe albo osiągają zero po skończonej liczbie iteracji. Wszystkie liczby niewymierne (y_0) mają rozwinięie dwójkowe i tym samym orbitę, która nigdy sięnie powtarza; można pokazać że rozkład punktów wzdłuż takiej orbity jest losowe, chociaż ewolucja jest deterministyczna.
Idea podążania po orbicie, patrząc, po której stronie $x = 1/2$ wypada (rozwinięcie dwókowe działa tutaj bardzo dobrze i upraszcza) może być uogólnione do użytecznej techniki analizowania originalnego przekształcenia logistycznego dla innych wartości parametru. Ten model jest jednym

ze standardowych przykładów używanych w teorii układów dynamicznych.

- Odwzorowanie przedstawione w artykule jest ogólniejsze i nazywane asymetrycznym odwzorowaniem „namiot” (poprzednie było dla $\omega = 2$). Zmienna x_t przyjmuje wartości w przedziale jednostkowym $[0, 1]$ a wartości zmiennej są powiązane następująco: (1)

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_t/\omega, & \text{for } 0 \leqslant x_t \leqslant \omega, \\ (1 - x_t)/(1 - \omega), & \text{for } \omega \leqslant x_t \leqslant 1, \end{cases}$$

gdzie ω jest stałą $0 < \omega < 1$. Wykres tego modelu „namiotu” („chatki”) i ścieżka czasu (trajektoria) generowana przez niego przy początkowej wartości $x_0 = 0.19$ i $\omega = 0.4$ jest pokazana na Rys. 1. Jasne, że ścieżka wydaje się być losowa, tak jakby była wygenerowana przez proces stochastyczny. Okazuje się, że w długim czasie, szereg czasowy rozpoczynający się w prawie dowolnym punkcie początkowym wędruje w otwartym przedziale $(0, 1)$ zgodnie z jednostajnym rozkładem prawdopodobieństwa. Każda okresowa ścieżka czasu będzie niestabilna w sensie, że każda nawet najmniejsza zmiana punktu początkowego będzie prowadziła do drastycznej zmiany trajektorii po pewnym czasie.

0.3 Przykłady

Wspólną cechą w obu przykładach jest to, że x_{t+1} jest nieliniowo powiązany z x_t. Nieliniowość jest istotna dla modelu deterministycznego, aby był potencjalnie zdolny do opisu chaotycznego zachowania. Jeśli x_t jest liniowo związany z x_{t+1}, wówczas ścieżka czasowa może jedynie prezentować tłumione, stabilne lub eksplodujące oscylacje (lub stabilne lub eksplodujące nieoscylacje). Jest tak też wówczas, gdy w liniowym modelu pojawiają się wyrazy wyższych rzędów $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots$. Zatem opis najbogatszej możliwej różnorodności zachowań wymaga użycia modeli nieliniowych.

Stała Feigenbauma

Wielkim odkryciem amerykańskiego matematyka Mitchella Feigenbauma (1978) było zbadanie granicy wyrażenia $\delta_n = \frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{\omega_{n+1} - \omega_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, gdzie ω_n oznacza kolejne punkty, w których następuje bifurkacja z podwojeniem długości cyklu. Okazuje się, że ciąg δ_n ma granicę $\delta_n \to 4.669201609\ldots$. To co jest zaskakujące i stanowi o wielkości odkrycia Feigenbauma, to fakt, że otrzymuję się taką samą stałą δ dla wielu rodzin funkcji zależnych od jednego parametru.

0.4 Cytaty

Cytaty obrazujące zmiany poglądów na naturę - z całkowitej regularności do kompletniej nieregularności i nieprzewidywalnych zachowań obserwowanej natury.

- Pierre Simon de Laplace, *Essai philosophique sur les probabiltes*, 1776: *...if we conceive of an intelligence which at a given instant comprehends all the relations of the entities of the universe, it could state the respective positions, motions and general affects of all these entities at any time in the past or future*
  Umysł, który w jakimś danym momencie znałby wszystkie siły ożywiające Przyrodę i wzajemne położenia składających się na nią bytów i który byłby wystarczająco potężny, aby poddać te dane analizie, mógłby streścić w jednym równaniu ruch największych ciał wszechświata oraz najdrobniejszych atomów: dla takiego umysłu nic nie byłoby niepewne, a przyszłość, podobnie jak przeszłość, miałby przed oczami.

- Poincare, 1903: *...but it is not always so; it may happen that small difference in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena. A small error in the former will produce a large one in the later. Prediction becomes impossible*

1 Wprowadzenie

- Lata 70. i 80. XX wieku były świadkiem wielkiego wzrostu zainteresowania badaniem układów dynamicznych i chaosem. Korzenie tych dziedzin sięgają jednak końca XIX w. i wiążą się z analizą układów planetarnych, którą zajmował się Poincare (1899). Głównym celem obszaru nieliniowych układów jest opis skomplikowanych procesów fizycznych w terminach modeli deterministycznych (mechanika płynów, przepływ płynu modelowany równaniem różniczkowym). Odnowienie zainteresowania (wśród fizyków, ale też statystyków i ekonomistów - badanie danych zmieniających się wraz z upływem czasu; szeregi czasowe) tym obszarem w latach 70. i 80. XX wieku było spowodowane zaskakującymi odkryciami - bardzo proste modele deterministyzcne układów dynamicznych mogą dawać nieprzewidywalne zachowanie, które ma cechy procesów losowych.

- Większość ważnych pierwszych prac dotyczących chaosu i fraktali pojawia się w obszarze biologii, meteorologii, fizyki, chemii i informatyki. Te prace pozostawały stosunkowo mało znane, aż do początków lat 70, kiedy to miała miejsce eksplozja zainteresowania tym tematem. Pracę, której przypisuje się zasługę tej eksplozji zainteresowania chaosem jest praca Lorenza (1963). Praca ta dotyczyła prognozowania pogody. Lorenz pokazał, że trajektoria opisana przez układ prostych równań różniczkowych może zachowywać się dziwnie, pokazał także zachowanie chaotyczne, które zależy od konkretnych warunków początkowych.

- W 1963 r. Edward Lorenz z Massachusetts Institute of Technology ogłosił artykuł zatytułowany *Deterministyczny przepływ nieokresowy (Deterministic Nonperiodic Flow.* Lorenz chciał zostać matematykiem, lecz wybuchła II wojna światowa i zamiast tego stał się meteorolgiem lub myślał ,że nim jest. W rzeczywistości miał wciąż duszę matematyka. Warto zacytową streszczenie artykułu Lorenza, w którym podsumowuje swoje wyniki: *Można sformułować skończone układy nieliniowych deterministycznych równań różniczkowych zwyczajnych, opisującyh wymuszony, dyssypatywny przepływ hydrodynamiczny. Rozwiązania tych równań mogą być utożsamione z trajektoriami w przestrzeni fazowej. Dlau kładów z ograniczonymi rozwiązaniami stwierdzono, że rozwiązania nieokresowe są zwyczajnie stabilne w stosunku do małych odkształceń, tak że stany początkowe różniące sięnieznacznie mogąrowzwijać sięw stany znacznie róźńe od siebie. Poakzana, że układy o ograniczonych rozwiązaniah mają ograniczone rozwiązania liczbowe.*
Rozwiązano numerycznie prosty ukłąd przestawiający konwekcję komórkową. Wykryto, że wszystkie z rozwiązań są niestabilne i że prawie wszystkie są nieokresowe.
Zbadano możliwośćdokonywania bardzo długoterminowych pronoz pogody w świetle tych rezultatów.
Na zaledwie dwunastu stronach Lorenz przewidział kilka najważniejszych idei dynamiki nieliniowej, zanim stały sięmodne, zanim ktokolwiek zdał sobie sprawę z tego ,że istnieją nowe i zaskakująe zjawiska, takie jak chaos. Lorenz sądził, że jest meteorolgiem i naturalnie wydrukował swój artykuł w *Journal of the Atmospheric Sciences.* Meteorolodzy, którzy albo nie byli matematykami, albo byli biegli w tracyjnej matematyce, nie wiedzieli w istocie, co z tym zrobić. Nie wyglądało to na specjalnie ważne. Matematycy nie mieli w zwyczaju dokładnego czytania stronic *Journal of the Atmospheric Sciences.* I tak, przez dziesięciolecie, jego artykuł pozostawał w cieniu. Lorenz wiedział, że trafił na coś wielkiego, lecz wyprzedził swoje czasy.

- Pojęcie „chaos” zostało utrwalone przez Li i Yorke (1975), chociaż było już używane przez Lorenza (1963) w pracy dotyczącej układów równań różniczkowych w modelowaniu turbulencji obecnych przy prognozowaniu pogody. Pojęcie chaosu jest zwykle zarezerwowane dla układów dynamicznych, których stan może być opisany równaniami różniczkowymi w czasie ciągłym i różnicowymi równaniami w czasie dyskretnym.

- Należy podkreślić na początku, że statystyka zawsze zajmowała się badaniem złożonych zjawisk i z sukcesem była używana przy budowie modeli stochastycznych, które są zdolne opisywać takie zjawiska (losowość - podstawowa ida). Nowy obszar układów dynamicznych i chaosu oferuje fascynujące możliwości opisywania losowości jako wyniku znanego procesu deterministycznego. Pytanie, czy jesteśmy w stanie zidentyfykować okoliczności, w których to jest możliwe?
- Przykłady chaosu były/są obserwowane w przyrodzie:
  (a) ruch Hyperiona (księżyca Saturna) po orbicie
  (b) woda kapiąca z kranu
  (c) reakcje Biełousowa-Żabotyńskiego - najsłynniejszy przykład chemicznej złożoności, która pozwala obserwować zarówno chaos, jak i samoorganizację; koncentracja składników chemicznych nie zmienia się monotonicznie w czasie, ale oscyluje, czasem chaotycznie, czasem okresowo.
- Literatura pełna jest wielu innych przykładów dotyczących turbulencji i chaosu opisanych w różnorodnych dziedzinach takich jak fizjologia, geologia, epidemiologia, biologia (teoretyczne modele populacyjne), ekonomia, statystyka, logika i filozofia, różniczkowa topologia w teorii katastrof (1975).

1.1 Fraktale - wizytówka chaosu

- Innym podejściem do chaosu jest podejście związane z fraktalami. Fraktale są zbiorami, które charakteryzuje samopodobieństwo na wszystkich poziomach powiększenia. Zbiory te mogą mieć niecałkowie wymiary (typowe dla dziwnych atraktorów). Potocznie mówiąc, samopodobieństwo oznacza, że zbiór pozostaje jakościowo podobny w swojej przestrzennej charakterystyce przy powiększaniu (precyzyjne definicje można znaleźć w pracy Mandelbrota z 1982 r.).
- **Zbiór Mandelbrota** – Mandelbrot (1967,1977,1982) wprowadził i spopularyzował pojęcie fraktali, jest on autorem fraktala nazwanego zbiorem Mandelbrota. Zbiór ten tworzą punkty $c \in \mathbb{C}$, dla których ciąg opisany równaniem rekurencyjnym

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

nie dąży do nieskończoności $lim_{n\to\infty} z_n \neq \infty$; gdzie $c = a + ib$ jest liczbą zespoloną i $z_0 = 0$.
Otrzymane punkty formują dużą kardioidę i wiele mniejszych kardioid,

które są coraz mniejsze, wszystkie są połączone cienkimi liniami. Zbiór Mandelbrota jest związany z całą rodziną iteracyjnych przekształceń, wynikających z ustalenia $z_0 = 0$ i zmieniania c.

- **Zbiór Julii** – Zbiór ten tworzą punkty $p \in \mathbb{C}$, dla których ciąg opisany równaniem rekurencyjnym

$$\begin{cases} z_0 = p \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$$

nie dąży do nieskończoności $lim_{n\to\infty} z_n \neq \infty$; gdzie $c = a + ib$ jest liczbą zespoloną, parametrem zbioru.
Zbiór Julii jest brzegiem zbioru Mandelbrota, niezmiernie skomplikową figurą, która wygląda podobnie na każdym poziomie powiększenia.
Zbiór Julii jest otrzymany z pojedynczego przekształcenia iteracyjnego z ustalonym c i punktem początkowym bliskim 0.
Inaczej: Zbiór Julii jest granicą obszaru przyciągania punktów w nieskończoności (malujemy na czarno te punkty, które przy iteracji dążą do nieskończoności, a pozostałe na biało).
Zbiór Mandelbrota: daje nam ogólny obraz tego, jak zmienia się uzyskiwany dla danej wartoći c zbiór Julii, w miarę tego, jak parametr c przebiega płaszczyznę zespoloną.

- Alternatywnie zbiór Mandelbrota definiuje się jako punkty, które w rodzinie zbiorów Julii dają zbiory spójne.
Konstrukcja piernikowego ludzika: wybierzmy pewien punkt c na płaszczyźnie zespolonej. Następnie iterujmy odwzorowanie $z \to z^2 + c$ dla wszystkich możliwych z i wyznaczmy zbiór Julii dla wybranego c. Sprawdźmy czy stanowi on jedną całość. Jeżeli tak, zamalujmy punkt c na czarno, w przeciwnym razie - na biało. Powtórzmy to dla wszystkich c. Innym sposobem uzyskania tego jest iterowanie, dla każdego c.

Najbardziej znane fraktale:

1. **Zbiór Cantora** – w dziedzinie liczb rzeczywistych najlepiej znany fraktal; można go otrzymać przez usunięcie środkowej 1/3 z przedziału rzeczywistego $[0, 1]$, następnie usunięcie środkowej 1/3 z pozostałych przedziałów itd.
Wymiar fraktalny: $\frac{ln2}{ln3} \approx 0,631$.

2. **Dywan Sierpińskiego** – fraktal otrzymany z kwadratu za pomocą podzielenia go na dziewięć $(3x3)$ mniejszych kwadratów, usunięcia środkowego kwadratu i ponownego rekurencyjnego zastosowania tej samej procedury do każdego z pozostałych ośmiu kwadratów. Wymiar fraktalny:

$\frac{ln8}{ln3} \approx 1,893$.
Można udowodnić, że pole powierzchni dywanu Sierpińskiego wynosi 0 ($S_n = 1 - \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n}(\frac{8}{9})^k$).

3. **Trójkąt Sierpińskiego** – jeden z najprostszych fraktali. Znany był na długo przed powstaniem tego pojęcia. Konstrukcja tego zbioru była podana przez polskiego matematyka Wacława Sierpińskiego w 1915. Trójkat Sierpińskiego otrzymuje się następująco: w trójkącie równobocznym łączy się środki boków, dzieląc go w ten sposób na cztery mniejsze trójkąty. Trójkąt środkowy usuwa się, a wobec trzech pozostałych trójkątów operację się powtarza, dzieląc każdy z nich na cztery mniejsze trójkąty, usuwając środkowy, a wobec pozostałych czynności się powtarzają. Punkty pozostające po nieskończenie wielu powtórzeniach tej operacji tworzą trójkąt Sierpińskiego.
   Wymiar fraktalny: $\frac{ln3}{ln2} \approx 1,585$.

4. **Kostka/gąbka Mengera** — bryła fraktalna, trójwymiarowy odpowiednik zbioru Cantora i dywanu Sierpińskiego. Konstrukcja kostki została podana przez austriackiego matematyka Karla Mengera w roku 1927. Konstrukcja: Kostka Mengera powstaje w następujący sposób: Dany jest sześcian; tniemy go na 27 sześcianów równej wielkości płaszczyznami równoległymi do ścian; usuwamy wszystkie sześciany przyległe do środków ścian pierwotnego sześcianu oraz sześcian znajdujący się w jego środku; do każdego z 20 pozostałych sześcianów stosujemy poprzednią procedurę; po nieskończonej liczbie powtórzeń opisanych operacji otrzymujemy kostkę Mengera.
   Wymiar fraktalny: $\frac{ln20}{ln3} \approx 2,727$.

5. **Piramida Sierpińskiego** -– bryła fraktalna, trójwymiarowy odpowiednik trójkąta Sierpińskiego.
   Konstrukcja: Piramida Sierpińskiego powstaje z czworościanu foremnego przez wykonanie następującego algorytmu: Weź ostrosłup o boku długości x. Utwórz 4 ostrosłupy o boku długości 1/2x i umieść je w przestrzeni tak, by zawierały się w dużym ostrosłupie oraz każdy miał wspólny jeden wierzchołek z dużym ostrosłupem. Usuń duży ostrosłup. Do każdego z 4 małych ostrosłupów zastosuj ten algorytm. Po nieskończonej liczbie powtórzeń opisanych operacji otrzymujemy Piramidę Sierpińskiego.
   Wymiar fraktalny: $\frac{log_4}{log_2} = 2$.

6. **Krzywa Kocha** – powstaje z odcinka, poprzez podzielenie go na 3 części i zastąpienie środkowej ząbkiem (o ramieniu długości równej 1/3 odcinka) takim, że wraz z usuwaną częścią tworzy trójkąt równoboczny. Krok ten

jest powtarzany w nieskończoność dla każdego fragmentu odcinka.
Wymiar fraktalny: $\frac{log4}{log3} \approx 1.262$.

7. **Paproć Barnsleya** – fraktal znany ze względu na uderzające podobieństwo do liści paproci występujących w naturze, spopularyzowany przez Michaela F. Barnsleya. Jest to przykład złożonego obiektu, który może być opisany za pomocą zaledwie czterech przekształceń afinicznych. Przekształceń tych należy użyć w sposób losoowy w odpowiednich proporcjach.

8. **Płonący statek** – fraktal po raz pierwszy opisany przez Michaela Michelitscha i Otto E. Rösslera w 1992. Tworzą go punkty p płaszczyzny zespolonej, dla których ciąg opisany wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} z_0 = p \\ z_{n+1} = (|Re(z_n)| + i|Im(z_n)|)^2 + c \end{cases}$$

nie dąży do nieskończoności: $lim_{n\to\infty} z_n \neq \infty$. Podobnie jak dla zbioru Mandelbrota; różnica polega na występowaniu w „płonącym statku” wartości bezwzględnych we wzorze.

Atraktor chaotycznego układu dynamicznego (dziwny atraktor) jest fraktalem. Najprostsza geometryczna właściwość fraktali jest mierzona przez wymiar fraktalu.

1.2 Chaos w układach dynamicznych

Układ dynamiczny - układ równań różniczkowych zwyczajnych, będący zazwyczaj modelem matematycznym rzeczywistego zjawiska przyrody, którego ewolucja jest wyznaczona jednoznacznie przez stan początkowy, zwanym równaniem stanu.
Możliwe jest rozróżnienie pomiędzy dwoma typami układów dynamicznych zależnie od tego czy układ traci energię z powodu tarcia czy też nie:

- obecność tarcia charakteryzuje większość procesów fizycznych w naturze, które nazywane są dyssypatywnymi układami dynamicznymi
- w przeciwieństwie do konserwatywnych (zachowawczych) układów, gdzie nie ma żadnej straty energii.

Dyssypatywne układy zawsze zbiegają do asymptotycznych lub granicznych stanów ruchu w czasie - to zachowanie graniczne układów dyssypatywnych jest głównym celem badań.

Model ewolucyjny. Układy ciągłe a dyskretne

- Zazwyczaj używa się modelu ewolucyjnego wiążącego współrzędne pozycyjne z tempem zmian w tych współrządnych. W czasie ciągłym prosty model ewolucyjny może mieć postać: $\dot{x} = f_\omega(x(t))$ (3), gdzie $\dot{x}$ pokazuje chwilowe tempo zmian w położeniu $x(t)$ w czasie t, oraz ω oznacza ustalone parametry, takie jak intensywność siły sterującej układem.
- Podobne równanie w czasie dyskretnym wygląda: $x_{t+\tau} = f_\omega(x_t)$ (4), gdzie τ jest pewnym określonym przyrostem czasu.
- Pomiędzy ciągłymi i dyskretnymi modelami układów dynamicznych nie ma istotnej różnicy, jeśli tylko chcemy badać długookresowe zachowanie układu. (jest tak z powodu pomysłu Poincare'go - układ może być badany w kategoriach przekroju przestrzeni fazowej. Zamiast patrzeć na trajektorie, które wymagają rozwiązania równania różniczkowego, Poincare sugerował, że możemy patrzeć na punkty, w których trajektoria przecina hiperpłaszczyznę definiującą przekrój.) Stąd reszta dyskusji będzie odbywać się w kategoriach czasu dyskretnego, z $\tau = 1$ dla uproszczenia. Bez straty ogólności w praktyce, możemy przyjmować, że x_t jest wektorem w n-wymiarowej Euklidesowej przestrzeni R^n, a f_ω funkcją R^n w R^n.

Układy autonomiczne i nieautonomiczne, atraktory

Jeśli funkcja f_ω jest określona, włącznie z parametrami ω, i jeśli x_t jest obserwowane w pewnym początkowym momencie, powiedzmy $t_0 = 0$, wówczas mamy $x_t = f_w(f_w \cdots (f_\omega(x_0))) = f_\omega^t(x_0)$. Rozważanie granicznego zachowania $f_\omega^t(x_0)$ dla wszystkich możliwych punktów początkowych podsuwa pomysł atraktora.

Jeśli mamy model autonomiczny (niezależny bezpośrednio od czasu; nieautonomiczny układ może być przekształcony do autonomicznego układu) wyobraźmy sobie, że początkowo możliwe stany układu stanowi pewien podzbiór $U \subset R^n$ mający dodatnią objętość (miarę Lebesgue'a). Jeśli układ jest rozproszony, objętość musi być zmniejszona (ściśnięta) z powodu straty energii oraz U zbiega asymptotycznie do zbioru zwartego A. Dokładniej, A nazywany jest zbiorem atraktującym z podstawowym otoczeniem U, jeśli $f_\omega^t(A) = A$ dla każdego t i dla każdego zbioru otwartego $V \supset A$ mamy $f_\omega^t(U) \subset V$, jeśli tylko t jest wystarczająco duże. Suma zbiorów $(f_\omega^t)^{-1}(U)$ (odwrotności obrazów) dla każdego t nazywana jest basenem atraktorów A. Każda trajektoria zaczynająca się w punkcie z basenu atraktorów wpada przy $t \to \infty$ do otoczenia zbioru atraktorów A (zwanego też atraktorem), gdy $t \to \infty$.

Z powodu straty energii, objętość A staje się zerowa, ale to nie znaczy, że

A zawiera pojedyczny punkt stabilny. Jest wiele podzbiorów R^n mających zerową objętość, chociaż zawierają one nieprzeliczalnie wiele punktów. W zwykłej przestrzeni trójwymiarowej np. każda dwuwymiarowa powierzchnia ma zerową objętość. Zatem atraktor wynikający z długookresowego zachowania układu dyssypatywnego może być zaklasyfkiowany do jednej z czterech kategorii:

(a) pojedynczy punkt stabilny

(b) okresowy atraktor ze stałym okresem

(c) quasi-okresowy atraktor (superpozycja okresowych atraktorów z różnymi okresami)

(d) nieokresowy (chaotyczny) atraktor

W przestrzeni fazowej, pierwsze trzy typy atraktorów mają kształy jakościowe scharakteryzowane jako punkt, okrąg i torus, odpowiednio. Nieokresowy (chaotyczny) atraktor nie ma żadnego z tych klasycznych kształtów i nie może być otrzymany z nich przez ograniczone deformacje lub dyfeomorfizmy (odwracalny i ciągle różniczkowalne przekształcenie). Z tej przyczyny nazwany jest on dziwnym atraktorem, jest to pojęcie wprowadzone przez Ruelle i Takens (1971).

Nieliniowy model może mieć niskowymiarowy atraktor w przestrzeni fazowej, dlatego wzbudzają one zainteresowanie statystyków.

Pytania

Fakt, że nieliniowe modele są zdolne do generowania lub opisywania chaotycznego zachowania prowadzi do wielu ważych pytań. Te pytania są spowodowane faktem, że ten sam ogólny model może mieć cztery typy atraktorów zależnych od wartości parametru i warunków początkowych. Pośród wielu istotnych pytań, następujące rzeczy wydają się fundamentalne w teorii, jak i w praktyce:

1. Jakie są ogólne własności f_ω, które prowadzą do chaotycznego atraktora i jaki zbiór wartości parametrów i warunki początkowe pwowodują te własności?
2. Jakie są cechy chaotycznego atraktora i czy mogą być określone ilościowo?
3. Czy możemy zaobserwować atraktory w praktyce i jak możemy zidentyfikować modele deterministyczne, które je generują?
4. Jak możemy określić czy model deterministyczny, czy probabilistyczny będzie lepiej reprezentował dany proces, szczególnie z ograniczonymi lub zaszumionymi danymi?

Tylko częściowe odpowiedzi na te pytania są znane (niektóre dotyczą szczególnych przypadków). Pytania te są motywacją do badań układów nieliniowych.