

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Elżbieta Kukla**

Nr albumu: 266745

# **Wycena opcji amerykańskich w modelu dwumianowym**

**Praca licencjacka  
na kierunku MATEMATYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem  
**dra hab. Mariusza Skałby**  
Instytut Matematyki

Czerwiec 2010

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

## **Streszczenie**

W niniejszej pracy zaprezentowano metodę wyceny opcji amerykańskich w modelu dwumianowym. Model ten przedstawiony został po raz pierwszy w roku 1979 przez trzech amerykańskich ekonomistów: J. C. Coxa, S. A. Rossa i M. Rubinsteina („Option pricing: A simplified approach” [2]). W pracy wprowadzono wstępne pojęcia dotyczące opcji oraz przedstawiono algorytmy wyceny opcji amerykańskich na podstawie drzew dwumianowych. Rozważane są zarówno opcje, których wartość nie zależy od ścieżki cen instrumentu bazowego (ang. non-path-dependent American options), jak i te od niej zależne (ang. path-dependent American options). Przypomniana została probabilistyczna teoria optymalnego stopowania. Przedstawiono także przykłady obrazujące podane algorytmy wyceny. W ostatnim rozdziale omówiono model dwumianowy Coxa-Rossa-Rubinsteina oraz uwagi na temat zbieżności tego modelu do słynnego, ciągłego modelu Blacka-Scholesa (wraz z przykładem opracowanym przy użyciu pakietu Mathematica).

## **Słowa kluczowe**

model dwumianowy, wycena opcji amerykańskich, moment zatrzymania, model Coxa-Rossa-Rubinsteina

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.1 Matematyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

91-xx Game theory, economics, social and behavioral sciences

91Bxx Mathematical economics

91B25 Asset pricing models

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

Pricing American options using the binomial model



# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b> . . . . .	5
<b>1. Model dwumianowy</b> . . . . .	7
1.1. Model jednookresowy . . . . .	7
1.2. Model wielookresowy . . . . .	8
<b>2. Opcje amerykańskie non-path-dependent</b> . . . . .	9
2.1. Wycena opcji . . . . .	9
2.2. Replikacja opcji . . . . .	9
<b>3. Opcje amerykańskie path-dependent</b> . . . . .	15
3.1. Elementy teorii optymalnego stopowania . . . . .	15
3.2. Proces cen opcji . . . . .	17
3.3. Wycena opcji . . . . .	21
3.4. Replikacja opcji . . . . .	22
<b>4. Model Coxa-Rossa-Rubinsteina</b> . . . . .	25
4.1. Założenia modelu . . . . .	25
4.2. Zbieżność do modelu Blacka-Scholesa . . . . .	26
<b>A. Skrypty z programu Mathematica</b> . . . . .	27
<b>Podsumowanie</b> . . . . .	29
<b>Bibliografia</b> . . . . .	31



# Wprowadzenie

*Instrument pochodny* (ang. derivative security) jest instrumentem finansowym, którego wartość zależy od ceny *instrumentu bazowego* (ang. underlying asset). Każdy instrument pochodny jest pewnym kontraktem, który zawierają dwie strony. Osoba kupująca kontrakt (nabywca) zajmuje tzw. *długą pozycję* (ang. long position), natomiast osoba sprzedająca kontrakt (wystawca) zajmuje tzw. *krótką pozycję* (ang. short position). Instrumentem bazowym mogą być zarówno towary (pszenica, ropa, miedź), jak i instrumenty finansowe (akcje, waluta, indeksy giełdowe, stopy procentowe). Niniejsza praca dotyczy najpopularniejszych instrumentów pochodnych — opcji, dla których aktywem bazowym są akcje. Opcja jest kontraktem zezwalającym jednej stronie na zakup (w przypadku *opcji kupna*, ang. call option) albo sprzedaż (*opcja sprzedaży*, ang. put option) instrumentu bazowego w pewnej chwili w przyszłości za cenę, która jest ustalona w dniu zawarcia kontraktu. Ta z góry określona cena nazywana jest *ceną realizacji* lub *ceną wykonania opcji* (ang. exercise price, strike price). Wartość opcji otrzymana w wyniku odjęcia ceny wykonania opcji od ceny bieżącej instrumentu bazowego nazywa się *wartością wewnętrzną opcji*. Z kontraktem opcyjnym wiążą się pewne przepływy finansowe, związane z ceną wykonania opcji i ceną instrumentu bazowego, zwane *profilami wypłaty* (ang. payoff profile), a także konstrukcja *portfela replikującego* (realizującego strategię replikującą). Od innych instrumentów pochodnych (takich jak np. kontrakty forward) opcje odróżnia fakt, iż ich posiadacz nabywa prawo do realizacji opcji, ale realizacja kontraktu nie jest jego obowiązkiem. Opcje są wykorzystywane zarówno w celu zabezpieczenia (np. przed niekorzystną zmianą kursu akcji), jak i w celach spekulacyjnych.

Głównymi typami opcji są tzw. *opcje waniliowe* (ang. vanilla options), wśród których wyróżnić można *opcje europejskie* oraz *opcje amerykańskie*. Różnią się one wyłącznie możliwymi datami realizacji. Opcje mają określony *dzień wygaśnięcia* (ang. expiration date, expiry time) i jeśli opcja europejska ma być zrealizowana, to realizacja musi nastąpić dokładnie ustalonego dnia. Z kolei w przypadku opcji amerykańskich, realizacja może nastąpić w dowolnej chwili od momentu zawarcia kontraktu aż do daty jego wygaśnięcia włącznie. Wynika stąd, że opcje amerykańskie są co najmniej tak samo wartościowe jak opcje europejskie. Istnieje też wiele innych rodzajów opcji np. *opcje bermudzkie* (realizacja musi nastąpić w określonym terminie lub przed nim, ale tylko we wcześniej ustalonych momentach).

W 1973 roku Fischer Black i Myron Scholes w artykule „The pricing of options and corporate liabilities” (Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, 1973, pp. 637-654) wyprowadzili słynny wzór na cenę europejskiej opcji kupna na akcje, które nie płacą dywidendy. W 1979 roku John Cox, Stephen Ross i Mark Rubinstein w pracy „Option pricing: A simplified approach” [2] przedstawili modyfikację modelu Blacka-Scholesa w przypadku dyskretnym, opartą na idei modelu dwumianowego.

W kolejnych rozdziałach niniejszej pracy zostaną omówione metody wyceny opcji amerykańskich na podstawie modelu dwumianowego. Głównym źródłem opracowania jest książka S. E. Shreve’a „Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model” [1].





# Rozdział 1

## Model dwumianowy

Model dwumianowy to prosty, ale bardzo ważny i elastyczny model rynku finansowego. Jest on powszechnie używanym narzędziem do określania cen opcji. Po raz pierwszy został zaproponowany przez J. C. Coxa, S. A. Rossa i M. Rubinsteina w artykule [2] w 1979 roku. Drzewo dwumianowe stanowi diagram reprezentujący różne możliwe ścieżki zmian cen instrumentu bazowego występujące w czasie życia opcji (zmiany następują w regularnych odstępach czasu). W granicy, gdy liczba okresów dąży do nieskończoności, model ten zbiega do słynnego modelu Blacka-Scholesa.

### 1.1. Model jednookresowy

Najprostszym modelem dwumianowym jest model jednookresowy. Początek okresu nazywa się *chwilą zero*, natomiast koniec okresu — *chwilą jeden*. W chwili zero cena za jeden udział kapitału akcyjnego wynosi  $S_0$  (jest to liczba dodatnia, znana w chwili zero). W chwili jeden cena ta przyjmuje jedną z dwóch wartości:  $S_1(H)$  lub  $S_1(T)$ , gdzie  $H$  i  $T$  oznacza odpowiednio orła i reszkę (ang. head, tail). Zatem wynik rzutu monetą determinuje cenę akcji. Moneta nie musi być symetryczna, jednak ważne jest, aby spełniony był warunek  $p + q = 1$ , gdzie  $p$  — prawdopodobieństwo wyrzucenia orła,  $q$  — prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki. Wprowadza się współczynniki:  $u = \frac{S_1(H)}{S_0}$ ,  $d = \frac{S_1(T)}{S_0}$ , przy czym  $d < u$ . Współczynnik  $u$  nazywany jest *czynnikiem górnym* (ang. up factor) oraz  $d$  — *czynnikiem dolnym* (ang. down factor). Zazwyczaj przyjmuje się, że  $d = \frac{1}{u}$ . Ponadto niech  $r$  oznacza *stopę zwrotu* (w poniższych rozważaniach, wystarczy przyjąć, że  $r > -1$ ).

Istotnym założeniem rynku efektywnego jest założenie braku arbitrażu. *Arbitrażem* nazywa się taką strategię handlową, w której istnieje dodatnie prawdopodobieństwo zysku bez ryzyka poniesienia strat. W modelu jednookresowym, aby wyeliminować możliwość arbitrażu, należy przyjąć, że [1]

$$0 < d < 1 + r < u. \quad (1.1)$$

Rozważmy teraz europejską opcję kupna, która daje jej właścicielowi prawo zakupu określonego kapitału akcyjnego po cenie wykonania  $K$  za jeden udział. Zakłada się, że  $S_1(T) < K < S_1(H)$ . Jeśli wyrzucona zostanie reszka, opcja wygaśnie, natomiast jeśli wypadnie orzeł, opcja będzie mogła być wykonana i przyniesie zysk  $S_1(H) - K$ . Podsumowując, opcja w chwili jeden jest warta  $(S_1 - K)^+$ , gdzie  $(\dots)^+$  oznacza maksimum z wyrażenia w nawiasach oraz zera. Innym przykładem instrumentu pochodnego jest europejska opcja sprzedaży, która wypłaca  $(K - S_1)^+$  w chwili jeden, gdzie  $K$  jest ustalone.

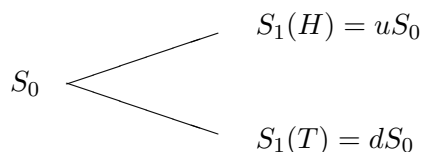
W modelu jednookresowym definiuje się *instrument pochodny* jako instrument finansowy wypłacający w chwili jeden pewną kwotę  $V_1(H)$ , gdy wynikiem rzutu monetą jest orzeł oraz

kwotę  $V_1(T)$ , gdy jest to reszka. Szczegółowa analiza wyceny opcji europejskiej zamieszczona jest w książce [1].

Przy wycenie opcji interesuje nas przede wszystkim jaka jest wartość opcji w chwili zero, zanim okaże się jaki będzie wynik rzutu monetą. Podejście arbitrażowe do wyceny opcji polega na replikacji tej opcji poprzez handel na rynku kapitałowym i pieniężnym. Do rozważań teoretycznych przyjmuje się *doskonały model rynku finansowego* (tzw. rynek bez tarcia, ang. frictionless market), o następujących cechach:

- brak możliwości arbitrażu,
- brak kosztów transakcji, podatków i prowizji,
- idealna podzielność aktywów i płynność rynku,
- współczynnik zmienności cen instrumentu bazowego jest znany i stały w czasie,
- istnieje krótka sprzedaż,
- stopy procentowe kredytów i depozytów są równe,
- stopa procentowa jest wolna od ryzyka, zdeterminowana i stała w czasie.

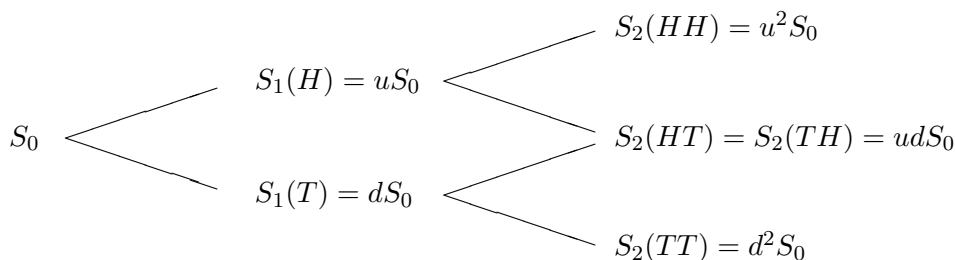
Ponadto w modelu dwumianowym w każdym kolejnym okresie akcje mogą przyjąć jedną z dwóch możliwych wartości. Na rysunku 1.1 przedstawiono jednookresowe drzewo dwumianowe.



Rysunek 1.1: Jednookresowe drzewo dwumianowe.

## 1.2. Model wielookresowy

Idee z podrozdziału 1.1 można uogólnić na model wielookresowy. Założenia modelu wielookresowego są analogiczne jak w przypadku modelu jednookresowego, ale tym razem rzuty monetą wykonywane są wielokrotnie. Poza rynkiem kapitałowym funkcjonuje także rynek pieniężny ze stałą stopą zwrotu  $r$  oraz obowiązuje warunek braku arbitrażu (1.1). Na rysunku 1.2 przedstawiono dwuokresowe drzewo dwumianowe.



Rysunek 1.2: Dwuokresowe drzewo dwumianowe.

## Rozdział 2

# Opcje amerykańskie non-path-dependent

W rozdziale drugim przedstawiony zostanie podstawowy algorytm wyceny opcji amerykańskich w przypadku, gdy wypłata z opcji jest zależna jedynie od obecnej wartości instrumentu bazowego (nie jest uwarunkowana jego ścieżką cen).

### 2.1. Wycena opcji

W  $N$ -okresowym modelu dwumianowym z czynnikami  $u$ ,  $d$  i stopą zwrotu  $r$ , spełniającym warunki braku arbitrażu (1.1) rozważmy opcję amerykańską. Niech  $g$  będzie określoną funkcją wypłaty z opcji. W każdym okresie  $n \leq N$  posiadacz opcji może zrealizować ją i otrzymać wypłatę w wysokości  $g(S_n)$ . Wartość  $V_n$  opcji amerykańskiej w chwili  $n$  można zapisać jako funkcję  $v_n$  ceny akcji  $S_n$  tzn.  $V_n = v_n(S_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  (zmiany cen akcji są procesem Markowa — prawdopodobieństwo każdego kolejnego zdarzenia zależy jedynie od wyniku poprzedniego). W okresie  $0 \leq n \leq N$  wartość opcji amerykańskiej non-path-dependent określa następujący algorytm [1]:

$$\begin{aligned} v_N(s) &= \max\{g(s), 0\} \\ v_n(s) &= \max\left\{g(s), \frac{1}{1+r} [\tilde{p}v_{n+1}(us) + \tilde{q}v_{n+1}(ds)]\right\}, \quad n = N-1, N-2, \dots, 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie  $\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$  oraz  $\tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$  są prawdopodobieństwami przy neutralnym podejściu do ryzyka (ang. risk-neutral probabilities).

### 2.2. Replikacja opcji

W tym podrozdziale zostanie sformułowane twierdzenie uzasadniające algorytm wyceny opcji amerykańskich (2.1). Twierdzenie to gwarantuje, że w każdej chwili  $n$  można zabezpieczyć krótką pozycję w opcjach amerykańskich z wartością wewnętrzną  $g(S_n)$ , ponadto możliwa bywa także konsumpcja  $C_n$ . Dowód tego twierdzenia nie zostanie przedstawiony, gdyż w kolejnym rozdziale udowodnione zostanie znacznie ogólniejsze twierdzenie uwzględniające także opcje, które są uwarunkowane ścieżką cen instrumentu bazowego. Przez  $\Delta_n$  oznaczana będzie liczba udziałów akcji, które powinny znajdować się w portfelu zabezpieczającym krótką pozycję w instrumencie pochodnym w chwili  $n$ .

**Twierdzenie 1 (Replikacja opcji amerykańskich non-path-dependent)**

Rozważmy  $N$ -okresowy model dwumianowy wyceny opcji z czynnikami  $\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$  i  $\tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$  takimi, że  $0 < d < 1+r < u$ . Niech dana będzie funkcja wypłaty  $g(s)$  oraz zdefiniowany rekurencyjnie przez (2.1) ciąg funkcji  $v_N(s), v_{N-1}(s), \dots, v_0(s)$ . Ponadto:

$$\Delta_n = \frac{v_{n+1}(uS_n) - v_{n+1}(dS_n)}{(u-d)S_n}, \quad (2.2)$$

$$C_n = v_n(S_n) - \frac{1}{1+r} [\tilde{p}v_{n+1}(uS_n) + \tilde{q}v_{n+1}(dS_n)], \quad (2.3)$$

gdzie  $0 \leq n \leq N-1$ . Wówczas:

(i)  $C_n \geq 0$  dla wszystkich  $n$ ,

(ii) jeśli  $X_0 = v_0(S_0)$  oraz wartości portfela  $X_1, X_2, \dots, X_N$  zdefiniowane są rekurencyjnie wzorem

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - C_n - \Delta_n S_n) \quad (2.4)$$

to

$$X_n(\omega_1 \dots \omega_n) = v_n(S_n(\omega_1 \dots \omega_n)) \quad (2.5)$$

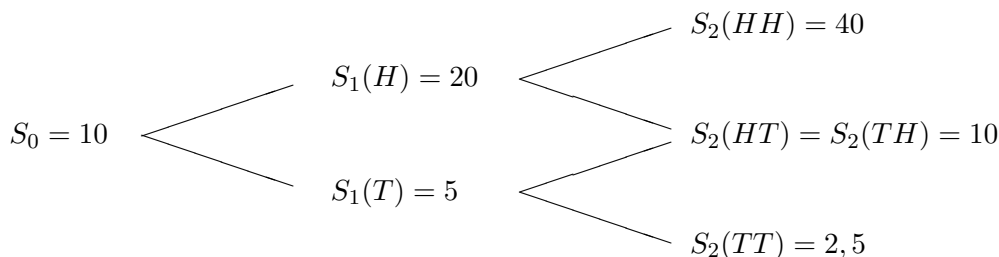
dla każdego  $n$  oraz dla wszystkich  $\omega_1 \dots \omega_n$ ,

(iii)  $X_n \geq g(S_n)$  dla każdego  $n$ .

**Przykład**

Rozważmy model dwuokresowy przedstawiony na rysunku 2.1, w którym  $u = 2$ ,  $d = 0,5$  oraz  $r = 0,25$  (stąd  $\tilde{p} = \tilde{q} = 0,5$ ). Załóżmy, że amerykańska opcja sprzedaży z ceną wykonania 12,5 wygasa w chwili 2. Innymi słowy, jeśli właściciel opcji zrealizuje ją w chwili  $n$ , otrzyma  $12,5 - S_n$ . Przyjmując, że  $g(s) = 12,5 - s$  i korzystając z algorytmu wyceny opcji amerykańskich (2.1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v_2(s) &= \max\{12,5 - s; 0\} \\ v_n(s) &= \max\{12,5 - s; 0,4 \cdot [v_{n+1}(2s) + v_{n+1}(0,5s)]\}, \quad n = 0, 1. \end{aligned}$$



Rysunek 2.1: Dwuokresowe drzewo dwumianowe przedstawiające wartości instrumentu bazowego (akcji).

Wynika stąd, że:

$$\begin{aligned}
v_2(40) &= 0, \\
v_2(10) &= 2,5, \\
v_2(2,5) &= 10, \\
v_1(20) &= \max\{12,5 - 20; 0,4 \cdot (0 + 2,5)\} = 1, \\
v_1(5) &= \max\{12,5 - 5; 0,4 \cdot (2,5 + 10)\} = 7,5, \\
v_0(10) &= \max\{12,5 - 10; 0,4 \cdot (1 + 7,5)\} = 3,4.
\end{aligned}$$

W celu skonstruowania portfela replikującego należy rozpocząć zabezpieczanie z początkowym kapitałem 3,4 i tak dobrać  $\Delta_0$ , aby wartość zabezpieczającego portfela w chwili 1 była równa wartości opcji. Jeśli w pierwszym rzucie wyrzucony zostanie orzeł, to

$$\begin{aligned}
1 &= v_1(S_1(H)) = S_1(H)\Delta_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \\
&= 20\Delta_0 + 1,25 \cdot (3,4 - 10\Delta_0) = 7,5\Delta_0 + 4,25.
\end{aligned}$$

Stąd  $\Delta_0 \approx -0,43$ .

Z drugiej strony, jeśli wyrzucona zostanie reszka, to

$$\begin{aligned}
7,5 &= v_1(S_1(T)) = S_1(T)\Delta_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) \\
&= 5\Delta_0 + 1,25 \cdot (3,4 - 10\Delta_0) = -7,5\Delta_0 + 4,25,
\end{aligned}$$

Stąd  $\Delta_0 \approx -0,43$ .

Wartość  $\Delta_0$  można znaleźć także podstawiając odpowiednie wartości do wzoru (2.2)

$$\Delta_0 = \frac{v_1(20) - v_1(5)}{20 - 5} = \frac{1 - 7,5}{15} \approx -0,43.$$

Zatem przy rozpoczęciu zabezpieczenia w chwili 0 z początkowym kapitałem  $X_0 = 3,4$  i  $\Delta_0 = -0,43$ , w chwili 1 mamy  $X_1 = V_1 = v_1(S_1)$  niezależnie od wyniku rzutu monetą.

Jeśli natomiast właściciel nie zrealizuje opcji w chwili 1 po wyrzuceniu reszki w pierwszym rzucie, to w kolejnym okresie opcja będzie warta  $v_2(10) = 2,5$ , (jeśli w kolejnym rzucie wypadnie orzeł) oraz  $v_2(2,5) = 10$  (jeśli w kolejnym rzucie wypadnie reszka). Zgodnie z formułą wyceny przy neutralnym podejściu do ryzyka (ang. risk-neutral valuation), należy skonstruować takie zabezpieczenie, aby w chwili 1 mieć portfel zabezpieczający o wartości:

$$0,4 \cdot (v_2(10) + v_2(2,5)) = 5.$$

Jednak zabezpieczający portfel w chwili 1 ma wartość  $v_1(5) = 7,5$ . Zatem można skonsumować 2,5, zmienić ilość udziałów akcji na  $\Delta_1(T)$  i dalej zabezpieczać się z pozostałą wartością portfela,  $X_1(T) = 5$ . Sugeruje to też, że posiadacz opcji „przegapił” optymalny moment wykonania opcji.

Jeśli w drugim rzucie wypadnie orzeł, to

$$\begin{aligned}
2,5 &= v_2(S_2(TH)) = S_2(TH)\Delta_1(T) + (1+r)(X_1(T) - S_1(T)\Delta_1(T)) \\
&= 10\Delta_1(T) + 1,25(5 - 5\Delta_1(T)) = 3,75\Delta_1(T) + 6,25.
\end{aligned}$$

Stąd  $\Delta_1(T) = -1$ .

Jeśli w drugim rzucie wypadnie reszka, to

$$\begin{aligned}
10 &= v_2(S_2(TT)) = S_2(TT)\Delta_1(T) + (1+r)(X_1(T) - S_1(T)\Delta_1(T)) \\
&= 2,5\Delta_1(T) + 1,25(5 - 5\Delta_1(T)) = -3,75\Delta_1(T) + 6,25.
\end{aligned}$$

Stąd  $\Delta_1(T) = -1$ .

Wartość  $\Delta_1(T)$  można znaleźć także, podstawiając odpowiednie wartości do wzoru (2.2)

$$\Delta_1(T) = \frac{v_2(10) - v_2(2,5)}{10 - 2,5} = \frac{2,5 - 10}{7,5} \approx -1.$$

Jeśli w pierwszym rzucie wypadnie orzeł, to w chwili 1 mamy portfel wartości  $X_1(H) = 1$ . Zatem na podstawie wzoru (2.2) mamy

$$\Delta_1(H) = \frac{v_2(40) - v_2(10)}{40 - 10} = \frac{0 - 2,5}{30} \approx -0,08.$$

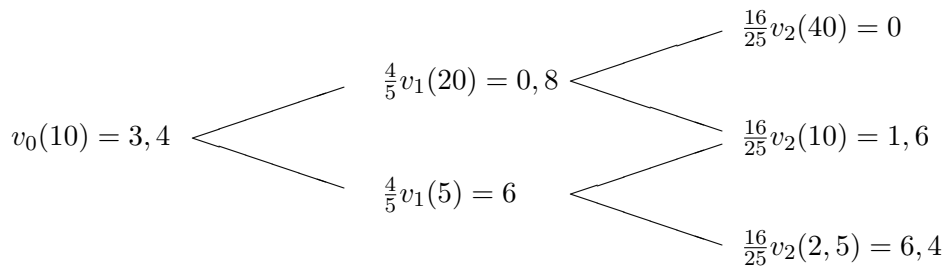
Jeśli w drugim rzucie wypadnie orzeł, w chwili 2 wartość zabezpieczającego portfela wyniesie

$$\begin{aligned} X_2(HH) &= S_2(HH)\Delta_1(H) + (1+r)(X_1(H) - S_1(H)\Delta_1(H)) \\ &= 40\Delta_1(H) + 1,25(1 - 20\Delta_1(H)) = 15\Delta_1(H) + 1,25 = 0 = v_2(40). \end{aligned}$$

Jeśli w drugim rzucie wypadnie reszka, to w chwili 2 wartość zabezpieczającego portfela wyniesie

$$\begin{aligned} X_2(HT) &= S_2(HT)\Delta_1(H) + (1+r)(X_1(H) - S_1(H)\Delta_1(H)) \\ &= 10\Delta_1(H) + 1,25(1 - 20\Delta_1(H)) = -15\Delta_1(H) + 1,25 = 2,5 = v_2(10). \end{aligned}$$

Drzewo dwumianowe zdyskontowanych cen amerykańskiej opcji sprzedaży przedstawiono na rysunku 2.2. W każdym węźle, zdyskontowana cena opcji amerykańskiej jest większa lub równa średniej zdyskontowanych cen w dwu kolejnych węzłach. Widać, że ten proces cen nie jest martyngałem, ponieważ nierówność jest ostra w węźle pierwszym, odpowiadającym reszce wyrzuconej w pierwszym rzucie.



Rysunek 2.2: Dwukresowe drzewo dwumianowe przedstawiające zdyskontowane ceny amerykańskiej opcji sprzedaży.

Wartości opcji sprzedaży (ang. put) oraz kupna (ang. call) obliczone na podstawie wzoru (2.1) dla różnych cen instrumentu bazowego  $S_0$  oraz liczby okresów  $n$  przedstawiono w tabelicy 2.1. Obliczenia wykonano przy użyciu pakietu Mathematica (skrypt programu zamieszczono w dodatku A). Przyjęto:  $u = 2$ ,  $d = 0,5$ ,  $p = q = 0,5$ ,  $K = 12,50$ . Wartość opcji sprzedaży dla  $S_0 = 10$  i  $n = 2$  umieszczona w tabelicy 2.1 jest zgodna z wynikiem uzyskanym w rozpatrywanym wcześniej przykładzie.

Tablica 2.1: Wartości opcji put oraz call w zależności od liczby okresów  $n$ , obliczone na podstawie wzoru (2.1) dla  $u = 2$ ,  $d = 0,5$ ,  $p = q = 0,5$ ,  $K = 12,50$ .

		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 10$
$S_0 = 10$	put	3,00	3,40	3,48	3,61	3,63	3,73
	call	3,00	4,40	5,76	6,59	7,37	9,17
$S_0 = 20$	put	1,00	1,20	1,52	1,58	1,71	1,84
	call	11,00	13,20	14,72	15,94	16,79	19,03
$S_0 = 50$	put	0	0	0,40	0,40	0,59	0,73
	call	40,00	42,00	44,00	45,12	46,34	48,85
$S_0 = 100$	put	0	0	0	0,16	0,16	0,35
	call	90,00	92,00	93,60	95,04	96,00	98,80





## Rozdział 3

# Opcje amerykańskie path-dependent

W rozdziale tym omówione zostaną własności opcji amerykańskich, których wartość może być uwarunkowana ścieżką cen instrumentu bazowego. Zostanie zdefiniowany proces cen opcji oraz zostanie pokazane, jak zabezpieczyć krótką pozycję w takich opcjach i jak wybrać optymalny czas realizacji. Przedstawione zostaną dowody wybranych twierdzeń zawartych w tym rozdziale. Dowody pozostałych twierdzeń zamieszczone są w książce [1].

### 3.1. Elementy teorii optymalnego stopowania

Moment, w którym opcja amerykańska powinna być zrealizowana zależy od losowych zmian cen instrumentu bazowego. Z przykładu zamieszczonego w poprzednim rozdziale (rys. 2.1) wynika, że jeśli w pierwszym rzucie wypadnie reszka, to właściciel amerykańskiej opcji sprzedaży powinien zrealizować ją w chwili 1. Z drugiej strony, jeśli w pierwszym rzucie wyrzucony zostanie orzeł (opcja put wypłaca w tym momencie 0), to właściciel opcji powinien poczekać na wynik drugiego rzutu. Jeśli w kolejnym rzucie wypadnie orzeł, wówczas opcja nadal wypłaca 0. Jednak jeśli w drugim rzucie wyrzucimy reszkę, to dostaniemy  $S_2(HT) = 10$ , zatem opłaca się zrealizować opcję ( $v_2(10) = 2, 5$ ). Wyżej opisane działanie można przedstawić w postaci zmiennej losowej  $\tau$  zdefiniowanej na przestrzeni probabilistycznej  $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$  o wartościach w zbiorze  $\{0, 1, 2, \infty\}$ . Nieskończona wartość zmiennej  $\tau$  oznacza, że opcja powinna wygasnąć bez realizacji. Na ścieżce  $HT$  opcja powinna zostać zrealizowana w chwili 2, natomiast jeśli wynikami rzutów będą  $TH$  lub  $TT$ , wówczas — w chwili 1, tzn.

$$\tau(HH) = \infty, \tau(HT) = 2, \tau(TH) = 1, \tau(TT) = 1.$$

#### Definicja 1 (Moment zatrzymania)

W  $N$ -okresowym modelu dwumianowym momentem zatrzymania (momentem stopu) nazywamy zmienną losową  $\tau$ , która przyjmuje wartości  $0, 1, \dots, N$  lub  $\infty$  i spełnia następujący warunek

$$\text{jeśli } \tau(\omega_1\omega_2 \dots \omega_n\omega_{n+1} \dots \omega_N) = n, \text{ to } \tau(\omega_1\omega_2 \dots \omega_n\omega'_{n+1} \dots \omega'_N) = n$$

dla wszystkich  $\omega'_{n+1} \dots \omega'_N$ .

Warunek z powyższej definicji zapewnia, że moment zatrzymania jest określony jedynie na podstawie dostępnej informacji (tzn. jeśli zatrzymanie nastąpi w chwili  $n$ , to decyzja ta oparta jest jedynie na wynikach  $n$  pierwszych rzutów monetą).

Niech  $Y_n$  będzie procesem zdyskontowanych cen opcji amerykańskiej z przykładu w rozdziale 2. Zgodnie z tym przykładem i wynikami przedstawionymi na drzewie dwumianowym na rysunku 2.2 mamy:

$$\begin{aligned} Y_0 &= 3, 4, & Y_1(H) &= 0, 8, & Y_1(T) &= 6, \\ Y_2(HH) &= 0, & Y_2(HT) &= Y_2(TH) = 1, 6, & Y_2(TT) &= 6, 4. \end{aligned}$$

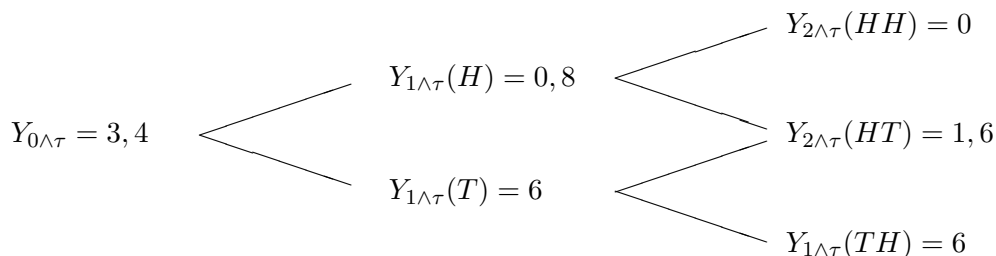
Niech  $\tau$  będzie momentem zatrzymania z definicji 1. Przyjmujemy oznaczenie:  $n \wedge \tau = \min\{n, \tau\}$ . Proces zatrzymania  $Y_{n \wedge \tau}$  określamy następująco:

$Y_{0 \wedge \tau} = Y_0 = 3, 4$ , ponieważ  $0 \wedge \tau = 0$  niezależnie od wyniku rzutów monetą.

Podobnie  $Y_{1 \wedge \tau} = Y_1$ , gdyż  $1 \wedge \tau = 1$  niezależnie od wyniku rzutów monetą.

$2 \wedge \tau$  zależy od wyniku rzutów monetą: jeśli uzyskamy HH lub HT, wówczas  $2 \wedge \tau = 2$ , ale jeśli uzyskamy TH lub TT, mamy  $2 \wedge \tau = 1$ . Zatem, mamy cztery przypadki:

$$\begin{aligned} Y_{2 \wedge \tau}(HH) &= Y_2(HH) = 0, & Y_{2 \wedge \tau}(HT) &= Y_2(HT) = 1, 6, \\ Y_{2 \wedge \tau}(TH) &= Y_1(T) = 6, & Y_{2 \wedge \tau}(TT) &= Y_1(T) = 6. \end{aligned}$$



Rysunek 3.1: Drzewo dwumianowe przedstawiające proces zatrzymania.

Na rysunku 3.1 przedstawiono drzewo obrazujące proces zatrzymania dla rozważanego przykładu. Należy zauważyć, że konstrukcja procesu trwa aż do chwili 2, nawet jeśli  $\tau$  przyjmuje wartość 1 i proces jest zatrzymany w chwili  $\tau$ .

### Definicja 2 (Martyngał, nadmartyngał, podmartyngał)

Niech  $M_0, M_1, \dots, M_N$  będzie ciągiem zmiennych losowych, przy czym  $M_n$  dla każdego  $n$  zależy wyłącznie od  $n$  pierwszych rzutów monetą. Przyjmujemy, że  $M_0$  jest stałe. Taki ciąg zmiennych losowych nazywany jest adaptowanym procesem stochastycznym.  $\mathbb{E}_n$  oznacza warunkową wartość oczekiwaną obliczoną w oparciu o informacje dostępne w chwili  $n$ .

(i) Jeśli:

$$M_n = \mathbb{E}_n[M_{n+1}], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (3.1)$$

to mówimy, że proces ten jest martyngałem.

(ii) Jeśli:

$$M_n \geq \mathbb{E}_n[M_{n+1}], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (3.2)$$

to mówimy, że proces ten jest nadmartyngałem.

(iii) Jeśli:

$$M_n \leq \mathbb{E}_n[M_{n+1}], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (3.3)$$

to mówimy, że proces ten jest podmartyngałem.

Teraz podane zostaną dwa podstawowe twierdzenia dotyczące momentu zatrzymania (tzw. twierdzenia o najlepszym wyborze).

**Twierdzenie 2 (Optional sampling I)**

*Martynał, który został zatrzymany w momencie stopu jest martynałem. Nadmartynał (podmartynał), który został zatrzymany w momencie stopu jest nadmartynałem (podmartynałem).*

**Twierdzenie 3 (Optional sampling II)**

*Niech  $X_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  będzie podmartynałem oraz niech  $\tau$  będzie momentem stopu. Wówczas  $\mathbb{E}X_{n \wedge \tau} \leq \mathbb{E}X_n$ . Jeśli  $X_n$  jest nadmartynałem, to  $\mathbb{E}X_{n \wedge \tau} \geq \mathbb{E}X_n$ , a jeśli  $X_n$  jest martynałem, to  $\mathbb{E}X_{n \wedge \tau} = \mathbb{E}X_n$ .*

### 3.2. Proces cen opcji

Dany jest model  $N$ -okresowy, z czynnikami  $u$  i  $d$  oraz stopą zwrotu  $r$  spełniającą warunki braku arbitrażu (1.1). Niech  $\mathcal{S}_n$  oznacza zbiór wszystkich momentów zatrzymania, które przyjmują wartości w zbiorze  $\{n, n + 1, \dots, N, \infty\}$ . W szczególności zbiór  $\mathcal{S}_0$  zawiera wszystkie momenty stopu, a moment stopu w  $\mathcal{S}_N$  może przyjmować tylko wartość  $N$  lub  $\infty$ . Przez  $\tilde{\mathbb{E}}_n$  będzie oznaczana warunkowa wartość oczekiwana obliczona w oparciu o informacje dostępne w chwili  $n$  przy użyciu prawdopodobieństw  $\tilde{p}$  i  $\tilde{q}$ .

**Definicja 3 (Proces cen opcji amerykańskich path-dependent)**

*Niech  $G_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , będzie zmienną losową, której wartość zależy od  $n$  pierwszych rzutów monetą. Opcja amerykańska z procesem wartości wewnętrznych  $G_n$  jest kontraktem, który może być zrealizowany w dowolnej chwili do momentu  $N$  włącznie. Jeśli realizacja następuje w chwili  $n$ , to wypłata wynosi  $G_n$ . Proces cen  $V_n$  tej opcji przy neutralnym podejściu do ryzyka definiuje się wzorem*

$$V_n = \max_{\tau \in \mathcal{S}_n} \tilde{\mathbb{E}}_n[\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau-n}} G_\tau], \quad n = 0, 1, \dots, N. \tag{3.4}$$

Przypuśćmy, że opcja amerykańska nie została zrealizowana w momentach  $0, 1, \dots, n - 1$  i chcemy określić jej wartość w chwili  $n$ . Właściciel opcji w chwili  $n$  może zrealizować opcję natychmiast albo przełożyć realizację na później. Moment, w którym właściciel realizuje opcję (o ile to robi) zależy od ścieżki cen instrumentu bazowego do chwili realizacji (jest to moment stopu  $\tau$ ). Ponieważ opcja nie została zrealizowana przed chwilą  $n$ , więc moment stopu musi znajdować się w  $\mathcal{S}_n$ . Oczywiście, jeśli właściciel nigdy nie zrealizuje opcji ( $\tau = \infty$ ), to otrzyma zerową wypłatę, gdyż indyktor  $\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}}$  jest równy 0. Gdy właściciel realizuje opcję zgodnie z momentem stopu  $\tau \in \mathcal{S}_n$ , wówczas wartość opcji w chwili  $n$  jest zdyskontowaną oczekiwaną wypłatą. Właściciel powinien wybrać moment stopu  $\tau$  tak, aby wypłata była największa z możliwych.

Jedną z bezpośrednich konsekwencji (3.4) jest następujący fakt

$$V_N = \max\{G_N, 0\}. \tag{3.5}$$

Istotnie, biorąc  $n = N$  w (3.4) dostaje się  $V_N = \max_{\tau \in \mathcal{S}_N} \mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau-N}} G_\tau$ . Moment stopu w  $\mathcal{S}_N$  przyjmuje jedynie wartości  $N$  lub  $\infty$ , zatem

$$\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau-N}} G_\tau = \mathbb{I}_{\{\tau=N\}} G_N.$$

Celem zmaksymalizowania tego wyrażenia należy przyjąć

$$\tau(\omega_1 \dots \omega_N) = N, \text{ gdy } G_N(\omega_1 \dots \omega_N) > 0 \text{ i } \tau(\omega_1 \dots \omega_N) = \infty, \text{ gdy } G_N(\omega_1 \dots \omega_N) \leq 0.$$

Przy takim wyborze  $\tau$  otrzymuje się  $\mathbb{I}_{\{\tau=N\}}G_N = \max\{G_N, 0\}$ , czyli równość (3.5).

#### Twierdzenie 4 (Optymalny moment realizacji opcji)

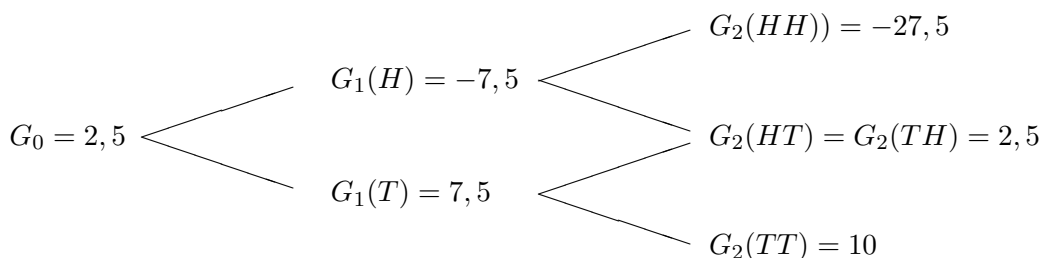
Moment zatrzymania  $\tau^* = \min \{n : V_n = G_n\}$  maksymalizuje prawą stronę (3.4), gdy  $n = 0$ , tzn.

$$V_0 = \tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{I}_{\{\tau^* \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^*}} G_{\tau^*}]. \quad (3.6)$$

Przed sformułowaniem dalszych konsekwencji definicji 3, przedstawiony zostanie przykład będący kontynuacją przykładu z rozdziału 2. Zilustrowana zostanie zgodność definicji 3 ze wzorami przedstawionymi w poprzednim rozdziale.

#### Przykład

Dla amerykańskich opcji sprzedaży z ceną wykonania 12,5 oraz wartościami instrumentu bazowego jak na rysunku 2.1. Wartość wewnętrzna  $G_n$  przedstawiona jest na rysunku 3.2.



Rysunek 3.2: Wartość wewnętrzna amerykańskiej opcji sprzedaży.

Z równości (3.5) wynika, że:

$$V_2(HH) = 0, \quad V_2(HT) = V_2(TH) = 2,5, \quad V_2(TT) = 10.$$

Następnie należy zastosować wzór (3.4) przyjmując  $n = 1$ . Najpierw rozważony zostanie przypadek orła w pierwszym rzucie. Wówczas

$$V_1(H) = \max_{\tau \in S_1} \tilde{\mathbb{E}}_1[\mathbb{I}_{\{\tau \leq 2\}} (0,8)^{\tau-1} G_\tau](H).$$

Aby zmaksymalizować prawą stronę powyższej równości należy przyjąć  $\tau(HH) = \infty$  (opcja nie zostaje zrealizowana w przypadku  $HH$ ) oraz  $\tau(HT) = 2$  (opcja zostaje zrealizowana w chwili 2 w przypadku wyrzucenia  $HT$ ). Decyzja o realizacji opcji w chwili 2 jest oparta na informacji dostępnej w chwili 2, więc nie narusza to warunków wymaganych w definicji 1 momentu zatrzymania. Zatem

$$V_1(H) = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot (0,8)^{2-1} G_2(HT) = 1.$$

Teraz należy zastosować wzór (3.4) z  $n = 1$  w sytuacji, gdy w pierwszym rzucie wypadła reszka. W tym przypadku

$$V_1(T) = \max_{\tau \in \mathcal{S}_\infty} \tilde{\mathbb{E}}_1[\mathbb{I}_{\{\tau \leq 2\}}(0, 8)^{\tau-1} G_\tau](T). \quad (3.7)$$

Celem zmaksymalizowania warunkowej wartości oczekiwanej należy rozważyć dwie możliwości — realizację w chwili 1 albo w chwili 2. Jasne, że chcemy zrealizować opcję w jednym z tych dwóch momentów, gdyż opcja jest wypłacalna niezależnie od drugiego rzutu monetą. Jeśli przyjmiemy się, że  $\tau(TH) = \tau(TT) = 1$ , to

$$\tilde{\mathbb{E}}_1[\mathbb{I}_{\{\tau \leq 2\}}(0, 8)^{\tau-1} G_\tau](T) = G_1(T) = 7, 5.$$

Natomiast jeśli  $\tau(TH) = \tau(TT) = 2$ , to

$$\tilde{\mathbb{E}}_1[\mathbb{I}_{\{\tau \leq 2\}}(0, 8)^{\tau-1} G_\tau](T) = 0, 8 \cdot (0, 5 \cdot G_2(TH) + 0, 5 \cdot G_2(TT)) = 0, 8 \cdot (0, 5 \cdot 2, 5 + 0, 5 \cdot 10) = 5.$$

Nie można wybrać jednocześnie  $\tau(TH) = 1$  oraz  $\tau(TT) = 2$ , ponieważ naruszałoby to własności momentów zatrzymania. Zatem z (3.7) otrzymuje się  $V_1(T) = 7, 5$ .

Wreszcie podstawiając  $n = 0$  do (3.4), mamy

$$V_0 = \max_{\tau \in \mathcal{S}_t} \tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{I}_{\{\tau \leq 2\}}(0, 8)^\tau G_\tau]. \quad (3.8)$$

Tutaj pojawia się wiele możliwości do rozważenia. Okazuje się, że warunkowa wartość oczekiwana jest maksymalizowana dla następującego  $\tau$

$$\tau(HH) = \infty, \quad \tau(HT) = 2, \quad \tau(TH) = \tau(TT) = 1.$$

Z takim momentem zatrzymania  $\tau$ , na podstawie wzoru (3.8)  $V_0$  przyjmuje wartość

$$\begin{aligned} V_0 &= 0, 25 \cdot 0 + 0, 25 \cdot (0, 8)^2 \cdot G_2(HT) + 0, 5 \cdot 0, 8 \cdot G_1(T) \\ &= 0, 25 \cdot 0, 64 \cdot 2, 5 + 0, 5 \cdot 0, 8 \cdot 7, 5 = 3, 4. \end{aligned}$$

Wyniki otrzymane w powyższym przykładzie zgadzają się z wynikami uzyskanymi w przykładzie z rozdziału 2. Jedyną różnicą jest fakt, iż poprzednio ceny były określone jako funkcje  $v_n$  cen instrumentu bazowego, natomiast tutaj są to zmienne losowe  $V_n$  (tzn. funkcje rzutów monetą). Ceny w obydwu przykładach są powiązane formułą  $V_n = v_n(S_n)$ .

W przykładzie widać było, że w niektórych sytuacjach opłaca się zrealizować amerykańską opcję put wcześniej (tzn. przed chwilą  $N$ ). Okazuje się, że w przypadku amerykańskiej opcji kupna nie istnieje żadna zachęta do zrealizowania opcji we wcześniejszym terminie (na rynku akcji, które nie płacą dywidend). Ten przypadek opisuje poniższe twierdzenie.

### Twierdzenie 5

*Rozważmy  $N$ -okresowy model dwumianowy wyceny opcji z  $r \geq 0$  w warunkach braku arbitrażu (1.1) oraz opcję amerykańską z wypukłą funkcją wypłaty  $g(s)$  spełniającą warunek  $g(0) = 0$ . Wartość tej opcji w chwili zero wynosi*

$$V_0^A = \max_{\tau \in \mathcal{S}_0} \tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^\tau} g(S_\tau)] \quad (3.9)$$

*i jest taka sama jak wartość opcji europejskiej z wypłatą  $g(S_N)$  w chwili  $N$ , tzn.*

$$V_0^E = \tilde{\mathbb{E}}[\frac{1}{(1+r)^N} \max\{g(S_N), 0\}]. \quad (3.10)$$

**Twierdzenie 6 (Własności procesu cen  $V_n$  opcji amerykańskiej)**

Proces cen  $V_n$  opcji amerykańskiej dany wzorem (3.4) ma następujące własności:

- (i)  $V_n \geq \max\{G_n, 0\}$  dla wszystkich  $n$ ,
- (ii) zdyskontowany proces cen  $\frac{1}{(1+r)^n}V_n$  jest nadmartyngalem,
- (iii) jeśli  $Y_n$  jest innym procesem spełniającym  $Y_n \geq \max\{G_n, 0\}$  dla wszystkich  $n$  oraz  $\frac{1}{(1+r)^n}Y_n$  jest nadmartyngalem, to  $Y_n \geq V_n$  dla wszystkich  $n$  (tzn.  $V_n$  jest najmniejszym procesem spełniającym (i) i (ii)).

**Dowód** (i) Niech  $n$  będzie ustalone i niech moment zatrzymania  $\tilde{\tau} \in \mathcal{S}_n$  przyjmuje wartość  $n$  niezależnie od wyniku rzutów monetą. Wówczas

$$\tilde{\mathbb{E}}_n[\mathbb{I}_{\{\tilde{\tau} \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tilde{\tau}-n}} G_{\tilde{\tau}}] = G_n.$$

Skoro  $V_n$  jest największą możliwą wartością, jaką można uzyskać dla  $\tilde{\mathbb{E}}_n[\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau-n}} G_{\tau}]$ , to musi być  $V_n \geq G_n$ . Z drugiej strony, jeśli moment zatrzymania  $\bar{\tau} \in \mathcal{S}_n$  i  $\bar{\tau} = \infty$  niezależnie od wyniku rzutów monetą, to

$$\tilde{\mathbb{E}}_n[\mathbb{I}_{\{\bar{\tau} \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\bar{\tau}-n}} G_{\bar{\tau}}] = 0.$$

Zatem  $V_n \geq 0$ , a stąd już można otrzymać tezę, tzn.  $V_n \geq \max\{G_n, 0\}$  dla wszystkich  $n$ .

(ii) Załóżmy, że dla  $\tau^*$  i ustalonego  $n$  jest przyjmowane maksimum  $V_{n+1}$ , tzn.

$$V_{n+1} = \tilde{\mathbb{E}}_{n+1}[\mathbb{I}_{\{\tau^* \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n-1}} G_{\tau^*}].$$

Ponieważ  $\tau^* \in \mathcal{S}_n$ , więc

$$\begin{aligned} V_n &\geq \tilde{\mathbb{E}}_n[\mathbb{I}_{\{\tau^* \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n}} G_{\tau^*}] = \tilde{\mathbb{E}}_n[\tilde{\mathbb{E}}_{n+1}[\mathbb{I}_{\{\tau^* \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n}} G_{\tau^*}]] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}_n[\frac{1}{1+r} \tilde{\mathbb{E}}_{n+1}[\mathbb{I}_{\{\tau^* \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau^*-n-1}} G_{\tau^*}]] = \tilde{\mathbb{E}}_n[\frac{1}{1+r} V_{n+1}]. \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony tej nierówności przez  $(1+r)^n$ , uzyskuje się własność nadmartyngału dla zdyskontowanego procesu cenowego

$$\frac{1}{(1+r)^n} V_n \geq \tilde{\mathbb{E}}[\frac{1}{(1+r)^{n+1}} V_{n+1}].$$

(iii) Niech  $Y_n$  będzie procesem spełniającym warunki (i) i (ii). Ponadto niech  $\tau$  będzie momentem zatrzymania z  $\mathcal{S}_n$ . Wiadomo, że  $Y_k \geq \max\{G_k, 0\}$  dla wszystkich  $k$ . Zatem

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} G_{\tau} &\leq \mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \max\{G_{\tau}, 0\} \leq \mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \max\{G_{N \wedge \tau}, 0\} + \mathbb{I}_{\{\tau = \infty\}} \max\{G_{N \wedge \tau}, 0\} \\ &= \max\{G_{N \wedge \tau}, 0\} \leq Y_{N \wedge \tau}. \end{aligned}$$

Następnie korzystając z twierdzenia 2 oraz z własności nadmartyngału dla  $\frac{1}{(1+r)^k} Y_k$ , dla ustalonego  $n \leq N$  zachodzi

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_n[\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau}} G_{\tau}] &= \tilde{\mathbb{E}}_n[\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{N \wedge \tau}} G_{\tau}] \\ &\leq \tilde{\mathbb{E}}_n[\frac{1}{(1+r)^{N \wedge \tau}} Y_{N \wedge \tau}] \\ &\leq \frac{1}{(1+r)^{n \wedge \tau}} Y_{n \wedge \tau} = \frac{1}{(1+r)^n} Y_n. \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z tego, że jeśli  $\tau \in \mathcal{S}_n$ , to jest ono większe bądź równe  $n$  na każdej ścieżce. Mnożąc obustronnie otrzymaną nierówność przez  $(1+r)^n$  otrzymuje się

$$\tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}} \frac{1}{(1+r)^{\tau-n}} G_\tau] \leq Y_n.$$

Ponieważ  $V_n$  jest maksymalną wartością jaką możemy otrzymać dla  $\tilde{\mathbb{E}}[\mathbb{I}_{\tau \leq N} \frac{1}{(1+r)^{\tau-n}} G_\tau]$ , gdy  $\tau \in \mathcal{S}_n$ , więc musi zachodzić  $V_n \leq Y_n$ .  $\square$

Własność (ii) twierdzenia 6 gwarantuje, że inwestor zaczynający z kapitałem początkowym  $V_0$  może skonstruować portfel zabezpieczający, którego wartość w każdej chwili  $n$  będzie wynosiła  $V_n$ . Własność (i) gwarantuje, że jeśli agent skonstruuje taki portfel, to może on zabezpieczyć nim krótką pozycję w instrumencie pochodnym, przy czym moment wykonania opcji jest bez znaczenia — wartość portfela zabezpieczającego jest w każdej chwili wystarczająca, aby spłacić instrument pochodny. Zatem warunki (i) i (ii) gwarantują, że cena opcji jest akceptowalna dla sprzedawcy. Warunek (iii) mówi, że cena ta nie może być wyższa od koniecznej do tego, aby była akceptowalna dla sprzedawcy. Warunek ten zapewnia także, że cena jest akceptowalna dla kupującego.

### 3.3. Wycena opcji

Następne twierdzenie stanowi uogólnienie algorytmu wyceny opcji amerykańskich (2.1).

#### Twierdzenie 7 (Wycena opcji amerykańskich path-dependent)

Wartość  $V_n$  opcji amerykańskiej path-dependent w chwili  $n$  określają wzory:

$$\begin{aligned} V_N(\omega_1 \dots \omega_N) &= \max\{G_N(\omega_1 \dots \omega_N), 0\}, \\ V_n(\omega_1 \dots \omega_n) &= \max\{G_n(\omega_1 \dots \omega_n), \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)]\} \\ &\text{dla wszystkich } n = N-1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdzie  $\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}$  oraz  $\tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}$ , natomiast  $G_n$  jest procesem wartości wewnętrznych tej opcji.

**Dowód** Wykazane zostanie, że  $V_n$  zdefiniowane rekurencyjnie przez (3.11) spełnia warunki (i) oraz (ii) z twierdzenia 6 i jest najmniejszym procesem spełniającym te warunki. Ponieważ proces  $V_n$  dany wzorem (3.4) jest najmniejszym procesem spełniającym warunki twierdzenia 6, więc (3.11) musi generować ten sam proces co (3.4).

- (i)  $V_N$  zdefiniowane przez (3.11) spełnia warunek (i) dla  $n = N$ . Zastosujmy indukcję wstecz w czasie. Załóżmy, że dla pewnego  $n \in [0, \dots, N-1]$  spełniony jest warunek  $V_{n+1} \geq \max\{G_{n+1}, 0\}$ . Wówczas z (3.11) wynika, że

$$V_n(\omega_1 \dots \omega_n) \geq \max\{G_n(\omega_1 \dots \omega_n), 0\}.$$

To kończy krok indukcyjny i uzasadnia, że  $V_n$  zdefiniowane rekurencyjnie przez (3.11) spełnia własność (i) z twierdzenia 6.

- (ii) Z (3.11) wynika, że

$$\begin{aligned} V_n(\omega_1 \dots \omega_n) &\geq \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}_n[\frac{1}{1+r}V_{n+1}](\omega_1 \dots \omega_n). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dzieląc obie strony tej nierówności przez  $(1+r)^n$  otrzymuje się własność nadmartyngału.

(iii) Następnie należy pokazać, że  $V_n$  zdefiniowane przez (3.11) i spełniające warunki (i) i (ii) z twierdzenia 6 jest najmniejszym procesem spełniającym te warunki. Z (3.11) wynika, że  $V_N$  jest najmniejszą zmienną losową spełniającą warunek  $V_N \geq \max\{G_N, 0\}$ . Dalej należy zastosować indukcję wstecz w czasie. Załóżmy, że  $V_{n+1}$  jest najmniejsze dla pewnego  $n \in [0, \dots, N-1]$ . Z własności (ii) wynika, że  $V_n$  musi spełniać (3.12). W celu spełnienia warunku (i), musi zachodzić  $V_n \geq G_n$ . Zatem warunki (i) i (ii) twierdzenia 6 implikują nierówność

$$V_n(\omega_1 \dots \omega_n) \geq \max\{G_n(\omega_1 \dots \omega_n), \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)]\}$$

dla  $n = N-1, \dots, 0$ . Ale (3.11) definiuje  $V_n(\omega_1 \dots \omega_n)$  jako równe prawej stronie (iii), co oznacza, że  $V_n(\omega_1 \dots \omega_n)$  jest najmniejsze.  $\square$

### 3.4. Replikacja opcji

Poniższe twierdzenie stanowi uogólnienie twierdzenia 1 z rozdziału 2.

#### **Twierdzenie 8 (Replikacja opcji amerykańskich path-dependent)**

Rozważmy  $N$ -okresowy model dwumianowy wyceny opcji w warunkach braku arbitrażu (1.1) ze współczynnikami:

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

Niech  $G_n$  będzie dowolną zmienną losową, której wartość zależy od  $n$  pierwszych rzutów monetą oraz niech  $V_n$  będzie dane wzorem (3.4),  $n = 0, 1, \dots, N$ . Ponadto niech:

$$\Delta_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)}, \quad (3.13)$$

$$C_n(\omega_1 \dots \omega_n) = V_n(\omega_1 \dots \omega_n) - \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)], \quad (3.14)$$

gdzie  $0 \leq n \leq N-1$ . Wówczas spełnione są następujące warunki:

(i)  $C_n \geq 0$  dla wszystkich  $n$ ,

(ii) jeśli  $X_0 = V_0$  oraz wartości portfela  $X_1, X_2, \dots, X_N$  zdefiniowane są rekurencyjnie wzorem

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - C_n - \Delta_n S_n), \quad (3.15)$$

to

$$X_n(\omega_1 \dots \omega_n) = V_n(\omega_1 \dots \omega_n) \quad (3.16)$$

dla każdego  $n$  i wszystkich  $\omega_1 \dots \omega_n$ .

(iii)  $X_n \geq G_n$  dla wszystkich  $n$ .

**Dowód** (i) Nieujemność  $C_n$  jest konsekwencją warunku (ii) twierdzenia 6 (czyli równo-  
ważnie (3.12)).

(ii) Celem wykazania (3.16) należy zastosować indukcję względem  $n$ . Założenie indukcyjne jest następujące  $X_n(\omega_1 \dots \omega_n) = V_n(\omega_1 \dots \omega_n)$  dla  $0 \leq n \leq N-1$  i wszystkich  $\omega_1 \dots \omega_n$ . Należy pokazać, że:

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) &= V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H), \\ X_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T) &= V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T). \end{aligned}$$



Zostanie wykazana pierwsza równość, dowód drugiej jest analogiczny.  
Z (3.14) wynika, że

$$V_n(\omega_1 \dots \omega_n) - C_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{1}{1+r} [\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)].$$

Wartości  $\omega_1 \dots \omega_n$  są ustalone, dlatego zostaną pominięte w zapisie. Z założenia (3.15) oraz równania (3.13) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} X_{n+1}(H) &= \Delta_n S_{n+1}(H) + (1+r)(X_n - C_n - \Delta_n S_n) = \\ &= \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H) - S_{n+1}(T)} (S_{n+1}(H) - (1+r)S_n) + (1+r)(V_n - C_n) \\ &= \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{(u-d)S_n} (uS_n - (1+r)S_n) + \tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{q}V_{n+1}(T) \\ &= (V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)) \frac{u-1-r}{u-d} + \tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{q}V_{n+1}(T) \\ &= (V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)) \tilde{q} + \tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{q}V_{n+1}(T) = (\tilde{p} + \tilde{q})V_{n+1}(H) \\ &= V_{n+1}(H). \end{aligned}$$

(iii) Ostatnia teza twierdzenia 8, tzn.  $X_n \geq G_n$  dla wszystkich  $n$ , wynika z (3.16) oraz warunku (i) twierdzenia 6.  $\square$



## Rozdział 4

# Model Coxa-Rossa-Rubinsteina

Model dwumianowy został zaprezentowany po raz pierwszy w roku 1979 przez J. C. Coxa, S. A. Rossa i M. Rubinsteina w pracy „Option Pricing: A simplified approach” [2]. Przedstawiony przez nich model stanowił prosty dyskretny analogon słynnego, ciągłego modelu Blacka-Scholesa zaproponowanego w 1973 roku.

### 4.1. Założenia modelu

W poprzednich rozdziałach omówiona została wycena opcji amerykańskich na podstawie drzew dwumianowych dla rynku akcji, które nie płacą dywidend. Jednak założenia przyjmowane w tych modelach są nierealistyczne i służyły tylko zilustrowaniu wykorzystywanych metod. Przypuszczenie, że ruchy cen akcji zmieniają się w czasie życia opcji tylko jeden lub dwa razy nie może skutkować dokładną wyceną opcji. W bardziej realistycznym modelu zakłada się, że rynek zmian cen akcji jest złożony z dużej liczby małych zmian o charakterze dwumianowym. To założenie jest podstawą szeroko rozpowszechnionego numerycznego sposobu aproksymacji cen opcji, który został zaproponowany przez J. C. Coxa, S. A. Rossa i M. Rubinsteina.

Rozważmy opcję na rynku akcji, które nie płacą dywidend. Czas życia opcji  $\tilde{T}$ , tzn. okres od momentu zawarcia kontraktu, do czasu realizacji opcji lub jego wygaśnięcia (np. w latach), dzielimy na  $n$  małych przedziałów czasowych o długości  $\Delta t = \frac{\tilde{T}}{n}$ . Podobnie jak w poprzednich rozdziałach zakłada się, że w każdym przedziale czasowym cena instrumentu bazowego, początkowo równa  $S_0$ , przyjmuje jedną z dwóch możliwych wartości:  $uS_0$  albo  $dS_0$  z prawdopodobieństwami odpowiednio  $p^*$  oraz  $q^* = 1 - p^*$ . Aby otrzymać model zgodny z modelem Blacka-Scholesa należy przyjąć parametry  $p^*$ ,  $u$  i  $d$  tak, aby otrzymać poprawną wartość oczekiwaną i wariancję cen akcji zmieniających się w czasie o długości  $\Delta t$ . Wówczas przy neutralnym podejściu do ryzyka, wartość oczekiwana ceny akcji po pierwszym kroku wynosi  $S_0 e^{r\Delta t}$ , gdzie  $r$  oznacza stopę zwrotu wolną od ryzyka (ang. risk-free interest rate). Natomiast wariancja ceny akcji przyjmuje wartość  $S_0^2 \sigma^2 \Delta t$ , gdzie  $\sigma$  oznacza odchylenie standardowe logarytmicznej stopy zwrotu z akcji [4], tzw. zmienność akcji (ang. volatility). Zatem dla wartości oczekiwanej mamy

$$p^* S_0 u + (1 - p^*) S_0 d = S_0 e^{r\Delta t}. \quad (4.1)$$

Dla wariancji otrzymujemy

$$p^* S_0^2 u^2 + (1 - p^*) S_0^2 d^2 - [p^* S_0 u + (1 - p^*) S_0 d]^2 = S_0^2 \sigma^2 \Delta t. \quad (4.2)$$

Równania (4.1) i (4.2) tworzą układ dwóch równań z trzema niewiadomymi  $p^*$ ,  $u$  oraz  $d$ . J. C. Cox, S. A. Ross i M. Rubinstein przyjęli dodatkowo że  $ud = 1$ . Po krótkich obliczeniach okazuje się, że:

$$p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \quad q^* = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d}, \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Według modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina algorytm wyceny opcji amerykańskich path-dependent jest następujący:

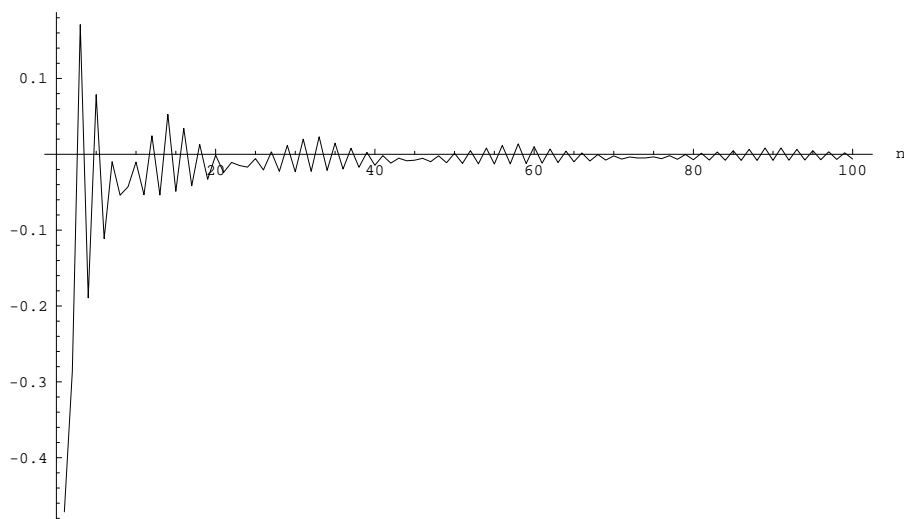
$$V_N = \max\{G_N, 0\},$$

$$V_n = \max\{G_n, e^{-r\Delta t}[p^*V_{n+1}(H) + q^*V_{n+1}(T)]\} \text{ dla wszystkich } n = N - 1, \dots, 0.$$

## 4.2. Zbieżność do modelu Blacka-Scholesa

Pierwszy dowód zbieżności modelu dwumianowego Coxa-Rossa-Rubinsteina wyceny opcji amerykańskich do ciągłego modelu Blacka-Scholesa przedstawili Kaushik Amin i Ajay Khanna w 1994 roku („Convergence of American option values from discrete- to continuous-time models”, *Mathematical Finance*, Vol. 4(4), 1994, pp. 289 - 348). Użyli oni podejścia probabilistycznego. Dowód przeprowadzili także Lishang Jiang i Min Dai („Convergence of binomial tree method for American options”, *Partial Differential Equations and their Applications*, 1999, pp. 106-118). Do pokazania zbieżności użyli oni równań różniczkowych cząstkowych.

Poniżej przedstawiono przykład numeryczny obrazujący zbieżność modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina do modelu Blacka-Scholesa. Obliczenia wykonane zostały przy użyciu pakietu Mathematica (skrypt z programu zamieszczono w dodatku A). Z rysunku wynika, że różnica między ceną opcji amerykańskiej call otrzymaną na podstawie modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina i na podstawie modelu Blacka-Scholesa zmniejsza się wraz ze wzrostem  $n$ .



Rysunek 4.1: Różnica między ceną opcji amerykańskiej call otrzymaną na podstawie modelu Blacka-Scholesa oraz modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina ( $S_0 = 50$ ,  $K = 45$ ,  $\sigma = 0,4$ ,  $T = 0,25$ ,  $r = 0,06$ ).

## Dodatek A

# Skrypty z programu Mathematica

Algorytmy wyceny według uproszczonego modelu dwumianowego, modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina oraz modelu Blacka-Scholesa zostały zaimplementowane w programie Mathematica. Skrypty opracowano w oparciu o pracę [3].

### Uproszczony model dwumianowy (rozdział 2)

```
AmericanOption[s_, r_, exercise_Function, n_]:=
Module[{
  u = 2,
  d = 1/2,
  p, q, Value},
  p = (1 + r - d)/(u - d);
  q = (u - 1 - r)/(u - d);
  Value[node_, level_]:=Value[node, level]=
  If [level == n, exercise[s*d^node*u^(level - node)],
    Max[{p/(1 + r), q/(1 + r)}.{Value[node, level + 1],
      Value[node + 1, level + 1]},
    exercise[s*d^node*u^(level - node)]]];
  Value[0, 0]];

AmericanCall[s_, K_, r_, n_]:=AmericanCall[s, K, r, n ]=
  AmericanOption[s, r, Max[# - K, 0] &, n];
AmericanPut[s_, K_, r_, n_]:=AmericanPut[s, K, r, n ]=
  AmericanOption[s, r, Max[K - #, 0] &, n];

c = Table[{n, AmericanCall[10, 12.5, 0.25, n]}, {n, 1, 10}]
d = Table[{n, AmericanPut[10, 12.5, 0.25, n]}, {n, 1, 10}]
```

### Model Coxa-Rossa-Rubinsteina (rozdział 4)

```
AmericanOption[s_, sigma_, T_, r_, exercise_Function, n_]:=
Module[{
  u = N[Exp[Sqrt[T/n]*sigma]],
  d = N[Exp[-Sqrt[T/n]*sigma]],
  R = N[Exp[r* T/n ]],
  p, q, Value},
```

```

p = (R - d)/(u - d);
q = (u - R)/(u - d);
Value[node_, level_] := Value[node, level] =
  If[level == n, exercise[s*d^node*u^(level-node)],
    Max[{p/R, q/R}.*{Value[node, level + 1],
      Value[node + 1, level + 1]},
      exercise[s*d^node*u^(level - node)]]];
Value[0, 0];

```

```

AmericanCall[s_, K_, sigma_, T_, r_, n_] := AmericanCall[s, K, sigma, T, r, n] =
  AmericanOption[s, sigma, T, r, Max[# - K, 0] &, n];
AmericanPut[s_, K_, sigma_, T_, r_, n_] := AmericanPut[s, K, sigma, T, r, n] =
  AmericanOption[s, sigma, T, r, Max[K - #, 0] &, n];

```

```

a = Table[{n, AmericanCall[50, 45, 0.4, 0.25, 0.06, n]}, {n, 10, 100, 10}]

```

### Model Blacka-Scholesa

```

snormal[x_] := Erf[x/Sqrt[2]]/2 + 0.5;
Clear[d1, d2, BScall, BSput];
d1[s_, x_, sigma_, T_, r_] := (Log[s/x] + (r + sigma^2/2)*T)/(sigma*Sqrt[T])
d2[s_, x_, sigma_, T_, r_] := d1[s, x, sigma, T, r] - sigma*Sqrt[T]
BScall[s_, x_, sigma_, T_, r_] := s*snormal[d1[s, x, sigma, T, r]] -
  x*Exp[-r*T]*snormal[d2[s, x, sigma, T, r]]
BSput[s_, x_, sigma_, T_, r_] := BScall[s, x, sigma, T, r] + x*Exp[-r*T] - s
BScall[50, 45, 0.4, 0.25, 0.06]

```

Wykres przedstawiający zbieżność modelu dwumianowego wyceny opcji amerykańskich do formuły Blacka-Scholesa (rozdział 4)

```

ListPlot[Table[{n, BScall[50, 45, 0.4, 0.25, 0.06] -
  AmericanCall[50, 45, 0.4, 0.25, 0.06, n]}, {n, 1, 100, 1}],
  PlotJoined -> True, PlotRange -> All, AxesLabel -> {n, ""}]

```

# Podsumowanie

W pracy zaprezentowano dyskretną metodę wyceny opcji amerykańskich w oparciu o model dwumianowy. Przedstawiono podstawowe własności modelu dwumianowego oraz przykłady jego zastosowania do wyceny opcji amerykańskich put (zarówno non-path-dependent, jak i path-dependent). Omówiono także twierdzenia dotyczące replikacji opcji amerykańskich oraz elementy teorii optymalnego stopowania. Rozpatrzony został model dwumianowy zaproponowany przez J. C. Coxa, S. A. Rossa i M. Rubinsteina w 1979 roku. Przedstawiono jego własności, w szczególności fakt, że w granicy zbiega on do ciągłego modelu zaproponowanego przez F. Blacka i M. Scholesa w 1973 roku. Wykonano także obliczenia numeryczne przy użyciu pakietu Mathematica, które ilustrują zbieżność ceny opcji amerykańskich według modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina do ceny otrzymanej według modelu Blacka-Scholesa.

Metody wyceny opcji amerykańskich są nadal tematem wielu artykułów naukowych. W ciągu ostatnich lat prowadzonych było wiele badań dotyczących poprawienia dokładności i szybkości zbieżności modelu dwumianowego do modelu Blacka-Scholesa. Jedną z efektywnych dyskretnych metod wyceny jest także tzw. metoda trójmianowa (ang. trinomial method). Metoda ta jest podobna do metody stosowanej w modelu dwumianowym, którego ilustracją graficzną jest drzewo z dwiema ścieżkami wychodzącymi z każdego węzła. Model trójmianowy ilustruje drzewo, w którym z każdego węzła wychodzą trzy ścieżki (góra, dół i ścieżka stabilna).

Pomimo nieskomplikowanej teorii matematycznej, na której oparty jest model dwumianowy, jest on bardzo efektywny i elastyczny, jeśli chodzi o wycenę opcji, a szczególnie w przypadku opcji amerykańskich. Ponadto może być on stosowany także w przypadkach, w których model Blacka-Scholesa nie jest łatwo zastosować, np. przy wycenie opcji amerykańskich na rynku akcji z nieregularnymi wypłatami dywidend.





# Bibliografia

- [1] Steven E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [2] John C. Cox, Stephen A. Ross, Mark Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics, No. 7, pp. 229-263, 1979.
- [3] Simon Benninga, Zvi Wiener, *Binomial Option Pricing, the Black-Scholes Option Pricing Formula and Exotic Options*, Mathematica in Education in Research, Vol. 6, No. 4, 1997.
- [4] John C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, seventh edition, Prentice Hall, New Jersey, 2009.