WYKŁAD 1, *06.10.2010*

1. **Def.** Niech dany będzie układ równań $\dot{x} = f(t, x)$ (1), z funkcją $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$, klasy C^1. Niech $\bar{x}(t)$ będzie rozwiązaniem tego układu w przedziale $[0, \infty)$.
   Rozwiązanie $\bar{x}(t)$ jest **stabilne w sensie Lapunowa** dla $t \to +\infty$, jeśli $\forall \epsilon > 0\ \exists t_0 \geqslant 0$ oraz $\eta > 0$, że każde rozwiązanie $x(t)$ równania (1), takie że $|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \eta$, spełnia dla $t > t_0$ warunek $|x(t) - \bar{x}(t)| < \epsilon$.
   Jeśli dodatkowo $\lim_{t\to+\infty} |x(t) - \bar{x}(t)| = 0$, to mówimy, że rozwiązanie $\bar{x}(t)$ równania (1) jest **asymptotycznie stabilne**.

2. **Def.** Niech będzie dane równanie $\dot{x} = f(x)$ (2), gdzie f jest odwzorowaniem, określonym na otwartym zbiorze $Q \in \mathbb{R}^m$ zawierającym początek układu współrzednych. O odwzorowaniu tym zakładamy, że jest klasy C^1 oraz spełnia warunek $f(0) = 0$.
   Funkcją Lapunowa dla równania (2) nazywamy funkcję V(x) klasy C^1 w Q ($V : Q \to \mathbb{R}$) spełniającą warunki:
   (a) $V(x) \geqslant 0$
   (b) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   (c) jeśli $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (2), to funkcja złożona $V(x(t))$ jest nierosnącą funkcją zmiennej t, tzn. $\frac{d}{dt}V(x(t)) = gradV \cdot f \leqslant 0$.

3. **Tw.** (lemat) Niech f będzie odwzorowaniem jw. Jeśli dla równania (2) z odwzorowaniem f istnieje funkcja Lapunowa, to rozwiązanie $\bar{x}(t) \equiv 0$ równania (2) jest stabilne. Jeśli dodatkowo $gradV \cdot f < 0$ dla $x \in Q\backslash\{0\}$, to rozwiązanie $\bar{x}(t) \equiv 0$ jest asymptotycznie stabilne.

4. **Def.** Niech będzie dany układ autonomiczny $\dot{x} = f(x)$ (3) i niech $x = 0$ będzie jego punktem krytycznym.
   Linearyzacją układu (2) w otoczeniu punktu $x = 0$ nazywamy układ liniowy o stałych współczynnikach $\dot{x} = Ax$, taki że układ (3) można zapisać w postaci $\dot{x} = Ax + g(x)$, gdzie $g(x)$ jest funkcją ciągłą, która spełnia warunek $\lim_{|x|\to 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0$.

Wykład 2, *13.10.2010*

5. $etA = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \ldots$, $||T|| = \sup_{||X||_1=1} ||Tx||_2$,
   gdzie $T : B_1 \to B_2$ (liniowy operator),
   B_1, B_2 - przestrzenie Banacha z normą odpowiednio $|| \cdot ||_1$, $|| \cdot ||_2$. Inaczej: $||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||_2}{||x||_1}$.

6. $f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)(z - IA)^{-1}dz = If(0) + f'(o)A + \frac{f''(0)A^2}{2!} + \ldots$
   $(z - IA)^{-1}$ exists and is boundeed $\Leftrightarrow z \notin SpA$.

7. **Zad.** $\dot{x} = Ax$ has $x \equiv= 0$ as a stable solution, $x(t) = e^{At}x_0$.

Wykład 3, *20.10.2010*

8. **Theorem** $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, $f \in C^1$, $A := \frac{\delta f}{\delta x}(0)$, $f : B \to B$ (Banach spaces).
   $\dot{x} = Ax(t)+g(x(t))$ $g \in o(||x||)$ - linearized equation in the vicinity of $x = 0$.
   Assumption: $ReSpaA < a < 0$ (*).
   Then $x(t) \equiv 0$ is asymptotically stable. We use:
   (a) $x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}g(x(\tau))d\tau$.
   (b) (*) implies that there exist $K > 0$ and $\mu > 0$ such that $||e^{ta}|| \leqslant Ke^{-\mu t}$, $0 < \mu < -a$
   (c) Gronwall inequality: $z(t) \leqslant a + b\int_{t_0}^t z(\tau)d\tau \Rightarrow z(t) \leqslant ae^{b(t-t_0)}$.

9. **Examples**: (a) $\dot{x} = f(x, \mu) = Ax + \mu Ix$, (b) $\dot{x} = xf(\mu - x^2 - y^2) - \beta y$, $\dot{y} = yf(\mu - x^2 - y^2) + \beta x$.

10. **Bifurkacje** - wystepują, gdy pojawiają się nagle nowe rozwiązania.
    Hopf bifurcation - a periodic solution bifurcates froma a trivial solution.

Wykład 4, *27.10.2010*

11. Equilibrium points:
    (a) given x_0 - equilibrium point, $f(x_0) = 0$ - studying its stability (many theorems - Lapunov function, linearization etc.)
    (b) find equilibrium points, if they exist (solutions of $f(x) = 0$) - in many cases it's not so simple that 0 is an equilibrium point (topological - Poincare index).

12. Periodic orbits: how to look for them (open problem);

13. stabilitiy of periodic orbits (existance/nonexistance/stability).

14. Bifurcation theory: bifurcations of stationary solutions ($f(x, \mu) = 0$); Hopf bifurcataion.

15. Chaotic solutions (chaos) - attractors of fractal dimensions.

Wykład 5, *03.11.2010*

16. **Asymptotyczna stabilność punktu krytycznego** $\dot{x} = f(x)$, x_0 - critical point $\Leftrightarrow$ $f(x_0) = 0$. x_0 is an asymptotically stable solution, when:
    (a) $\exists u \in \delta_{x_0}\ \forall x\ (\exists t_1\ x(t_1) \in U \Rightarrow x(t) \rightarrow_{t\rightarrow\infty} x_0)$
    (b) x_0 is Lapunov stable.

17. **Problems:** real canonical form of a real matrix; how to detect equilibrium points or limit cycles (periodic solutions)?

18. **Zbiorem granicznym w** $+\infty$ (zbiorem ω-granicznym) punktu p (orbity punktu p) będziemy nazywać zbiór: $w(p) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = lim_{n\rightarrow\infty} x(t_n; p)$ dla pewnego ciągu $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow +\infty\}$.
    Analogicznie definiujemy **zbiór graniczny w** $-\infty$ (zbiór α-graniczny) punktu p (orbity punktu p): $\alpha(p) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = lim_{n\rightarrow\infty} x(t_n; p)$ dla pewnego ciągu $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow -\infty\}$.

19. **Def.** Jeśli istnieje orbita zamknięta γ taka, że dla punktów y należących do pewnego otoczenia U zbioru γ mamy $w(y) = \gamma$ (lub $\alpha(y) = \gamma$), to γ nazywamy **cyklem granicznym**. Jeśli cykl graniczny γ ma tę własność, że $\gamma = w(y)$ dla wszystkich punktów z otoczenia U, to cykl ten nazywa się **atraktorem (stabilnym cyklem granicznym)**. Jeśli dla wszystkic punktów $y \in U$, $\gamma = \alpha(y)$, to cykl graniczny γ nazywa się **repelerem (niestabilny cyklem granicznym)**.

20. **Def. Lokalnym cięiem transwersalnym** orbity γ w punkcie p nazywamy podzbiór otwarty S pewnej hiperpłaszczyzny H (kowymiaru 1) taki, że:
    (a) $p \in S$
    (b) $\forall x \in S$, wektor $f(x)$ traktowany jako wektor w przestrzeni $\mathbb{R}^m$ nie jest równoległy do H, tzn. wektor $f(x)$ przesunięty do punktu x nie należy do H.

21. **Def.** Niech S będzie cięciem transwersalnym orbity γ w punkcie p. Dla dostatecznie maego otoczenia $U \subset S$ punktu p definiujemy przekształcenie $U \ni y \mapsto \theta(y) = x(t(y); y) \in S$, gdzie $x(t; y)$ jest rozwiązaniem równania $\dot{x} = f(x)$ z warunkiem $x(0) = y$, a $t(y)$ jest najmniejsząliczbą dodatnią, spełniającą warunek $x(t(y); y) \in S$. Odwzorowanie $\theta(y)$ nazywamy **przekształceniem Poincarego**.

22. **Def. Dywergencja** (rozbieżność, źródłowość) pola wektorowego - operator różniczkowy przyporządkowujący trójwymiarowemu polu wektorowemu pole skalarne będące formalnym iloczynem skalarnym operatora nabla z polem.

23. **Def. Wektor powierzchni** - wektor o wartości równej polu powierzchni i o kierunku prostopadłym do tej powierzchni.

24. **Theorem (Gauss)** (Gauss-Ostrogradzki, Stokes - more general) Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem ograniczonym powierzchnią zamkniętą S (∂V), a $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ będą funkcjami posiadającymi ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na obszarze V. Wówczas $\int\int_S (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) = \int\int_V \int (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dxdydz$.
   W postaci wektorowej: niech A będzie dowolnym polem wektorowym, dla którego istnieje dywergencja na całym zamkniętym obszarze o objętości $V = [x, y, z]$, wówczas: $\int\int_S \vec{A} d\vec{S} = \int\int_V \int div\vec{A} dxdydz$, gdzie $\vec{S}$ jest wektorem powierzchni. Inaczej: $\int_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V (\nabla \vec{A}) dV$.
   In the class: $\vec{A} = div\vec{f}(x)$ - vectorfield in $\mathbb{R}^n$. Take $divf(x) \neq 0$ for each point in V. Then there is no limit cycle in V (no periodic solution).

25. **Theorem (Dulac Criterion)** Suppose that $\vec{f}(x)$ - vectorfield in simply connected $V \subset \mathbb{R}^2$ (vectorfield $\rightarrow$ differentiable) and suppose there exists a **Dulac function** Φ (scalar function, C^1, $\Phi(x) > 0$) satisfying $div(\Phi f) \neq 0$ at each point of V. Then there is no limit cycle in V.

26. **Theorem (Poincare-Bendixon)** Jeśli w przestrzeni fazowej będącej podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ orbita zawiera o najmniej jeden swój punkt graniczny, to jest ona punktem krytycznym albo orbitą zamkniętą.
   Suppose that f flows in and suppose there are no equlibrium points in V. Then there exists a limit cycle in V.

Wykład 6, *10.11.2010*

27. **Poincare Index (of a curve)** - mapping $x \in C \longmapsto \frac{f(x)}{||f(x)||} = h(x)$ - unit vector $\dot{x} = f(x)$, $||f|| \neq 0$ on curve C.

28. **Properties of Poincare index**

    (a) for a constant field $i_C(f) = 0$

    (b) small deformation of the field does not change the index

    (c) small deformation of curve C does not change the index

    (d) if x_0 is not a critical point, then its index is 0.

29. **Problem**: $\dot{x} = x + g_1(x, y)$, $\dot{y} = y + g_2(x, y)$, where $|g_1|, |g_2| < M$. There exists an equililbrium point in $\mathbb{R}^2$.

30. **Implicit Function Theorem** $F : B_1 \times B_2 \mapsto B_3$ - Banach spaces, $F \in C^1$. Let the Frechet derivative exists. Suppose that for z_0, $\tilde{r_0}$ we have $F(z_0, \tilde{r_0}) = 0$ $F_z(z_0, \tilde{r_0})$ (F_z: $B_1 \mapsto B_3$, linear) has a bounded inverse. Then: in some neighbourhood of $(z_0, \tilde{r_0})$ there exists a unique function z_{r_0} such that $F(z(r_0), r_0) \equiv 0$ and $z((\tilde{r_0}) = z_0$.

Wykład 7, *17.11.2010*

31. **Raus-Hurwitz Theorem** $w(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots a_n$ - characteristic polynomial ($a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$). The roots of $w(\lambda)$ have negative real parts $\Leftrightarrow$ $a_0, a_1, \dots, a_n > 0$) and all principal determinants of matrix below are positive:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & . & . & . \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & . & . & . \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & . & . & . & . & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

32. **Frechet derivative** $F(z+h, r_0) = f(z, r_0) + F_z(z, r_0)h + r(z, h)$.
Directional derivative $\frac{d}{d\epsilon}F(z+\epsilon h, r_0)|_{\epsilon=0} = F_z(z, r_0)h$.

33. **Def. F jest różniczkowalna w sensie Frecheta w punkcie u**, jeśli istnieje liniowy, ograniczony operator $DF(u) : B_1 \to B_2$ taki że: $\forall h \in B_1$ $F(u+h) - F(u) = DF(u)h + r(u, h)$, $\frac{r(u,h)}{||h||} \longrightarrow_{||h|| \to 0} 0$.

34. **Theorem** If $F : B_1 \to B_2$ is Frechet differentiable then $\frac{\partial F}{\partial h} = DFh$.

35. **Hopf Bifurcations** ($\dot{x} = f(\mu, x)$, $f(\mu, 0) = 0$, $\mu \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. $\dot{x} = A_\mu x$ (linear part) $+g_\mu(x)$ (higher oreder part). We get it after linearizing our system around 0, $g = o(||x||)$.
Assumptions:

    i) $f \in C^1$: $A_\mu x$ - with respect to μ (with respect to x it's clear as it's linear), $g_\mu(x)$ - with respect ot μ and x

    ii) $\frac{\partial^2}{\partial u \partial x} f$ - continuous

    iii) For $\mu = \mu_{cr} \in (a, b)$ there are two simple (one complex eigenvector - two real ones) conjugate eigenvalues that are passing through the imaginary axis with non-zero speed $(\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu))$, $\frac{d}{d\mu} Re\lambda(\mu_{cr}) \neq 0$.

    Then here exists a family of periodic orbits (2π-periodic solution $r(\theta)$; after changing to polar coordinates and use of Implicit Function Theorem), in some vicinity of $x \equiv 0$, $\mu = \mu_{cr}$.
    Conclusion: Hopf bifurcation theorem is true, when more then two eigenvalues are passing through the imaginary line, but then we have to assume that the additional eigenvalues satisfy $\lambda_k \neq im\beta(0)$ for any $m \in Z$.

Wykład 9, *01.12.2010*

36. **Twierdzenie Grobmana-Hartmana** Jeśli $x = 0$ jest punktem hiperbolicznym układu $\dot{x} = Ax + g(x)$, gdzie $g(x)$ jest klasy C^1 w otoczeniu zera, $g(0) = 0$ oraz $\lim_{|x|\to 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0$, to portret fazowy ww. układu jest w otoczeniu punktu $x = 0$ homeomorficzny z portretem fazowym układu zlinearyzowanego $\dot{x} = Ax$.
37. **Theorem** If $Df(0)$ is a contraction then f is also a contraction in some vicinity of 0.
38. **Flip bifurcation, period doubling**.

Wykład 10, *08.12.2010*

39. **Bifurcations of mapping:**
    - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, \mu) \mapsto f(x, \mu)$, $f(0, \mu) = 0$. Let $f_x(0, 0) = 1$, $f_x(0, \mu) \neq 1$ if $\mu \neq 0$. We know that $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ - dynamical system. We are looking for stationary point (bifurcations from zero). Draw the bifurcations diagram.
    - $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(x, \mu) \mapsto f(x, \mu)$, $f(0, \mu) = 0$. Let $1 \in SpDf(0, 0)$ for $\mu = 0$ (only) and $\frac{d}{d\mu}\lambda \neq 0|_{\mu=0}$. We know that $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ - dynamical system. $\lambda = 1$ is a simple eigenvalue at $\mu = 0$. Draw the bifurcations diagram.
40. x_0 is a **stationary point** iff. $f(x_0, \mu) = x_0$ for some $\mu = \tilde{\mu}$.
41. **Period doubling** $x \mapsto (f \circ f) = (DF)^2$. $\lambda = -1$ is transformed into $\lambda = 1$. After two iterations we are back in the same point.

Wykład 11, *15.12.2010*

42. **Theorem** $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ - dynamical system, $x_{n+1} = Dfx_n + g(x_n)$, $x_n \in \delta(0)$, $g \in o(x)$. Let λ_i - eigenvalues of Df. If $\exists k\ |\lambda_k| > 1 \Rightarrow 0$ is unstable.
43. **Types of bifurcation**: supercritical, subcriticacl, transcritical.
44. **Lemma** $A(\mu) \in C^k$, $\lambda(\mu)$ - isolated eigenvalue, then $\lambda(\mu)$ is also C^k.

45. **Center manifold**: $\dot{x} = Ax + f(x, y)$, $\dot{y} = By + g(x, y)$.
    A,B - linear parts, $f, g = o(x, y)$.
    $ReSpA = 0$, $ReSpB < 0$ - B is stable in some sense,
    $\dot{y} = By + g(0, y)$ has 0 as asymptotically stable equilibrium.
    $y = h(x)$, $\dot{x} = Ax + f(x, h(x))$.

46. **Example**: $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = -y + x^2$.

47. **Linear problem:** $\dot{y} = Ay$, $SpA = \{\Sigma_-, \Sigma_0, \Sigma_+\}$,
    where $\lambda \in \Sigma_- \Leftrightarrow Re\lambda < 0$, $\lambda \in \Sigma_0 \Leftrightarrow Re\lambda = 0$, $\lambda \in \Sigma_+ \Leftrightarrow Re\lambda > 0$
    $SpA_- = \Sigma_-$, $SpA_0 = \Sigma_0$, $SpA_+ = \Sigma_+$.
    $y \in E = E_-^s \oplus E_0 \oplus E_+$.

48. So after transformation system can be written in the form:
    $\dot{y}_- A_- = y_-$, $y_-(t) \to_{t\to\infty} 0$
    $\dot{y}_0 A_0 = y_0$ - long time behaviour is here (center manifold, if $A_+ = 0$)
    $\dot{y}_+ A_+ = y_+$, $y_+(t) \to_{t\to-\infty} 0$.

49. **Non-linear case**: stable manifold $y_0 \in \Sigma_s \Leftrightarrow y(t, y_0) \to_{t\to\infty} 0$; unstable manifold $y_0 \in \Sigma_u \Leftrightarrow y(t, y_0) \to_{t\to-\infty} 0$.

50. Digressions: heteroclinic, homoclinic trajectories, basin of attraction.

WYKŁAD 13, *12.01.2011*

51. **Center manifold** is an invariant manifold, $\dot{x} = f(x)$, $\in \mathbb{R}^n$.
52. **Def.** A manifold $S \subset \mathbb{R}^n$ is an **invariant manifold** iff. $x_0 \in S \Rightarrow x(t, x_0) \in S$ $(*)$ (where $x(t, x_0)$ - solution, $x(0, x_0) = x_0$. It is said to be local if $(*)$ is true for $|t| < T(x_0) >$). If $T = \infty$ then S is global invariant manifold.
53. **Example of a center manifold. Important property** If $(x(t), y(t)^T$ is the solution of $\dot{x} = g(x)$, $\dot{y} = -y$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, ($y(t, t_0) = e^{-(t-t_0)}y_0$ - exponential decay), then there exists a solution of the reduced to the center manifold system ($\dot{u} = g(u)$) such that $||(x(t), y(t))^T - (u(t), h(u(t)))^T|| \leqslant ce^{-\gamma t}$.
    Center manifold in this exapmle is $y \equiv 0$.
54. **In the general case** $y = h(x)$ is the quation of the centre manifold. Note that in linear case $\dot{x} = Ax$, $\dot{y} = By$, the center manifold is $y = 0$, because the center manifold for this case is spanned by all generaized eigenvectors of A.
55. $\dot{x} = Ax + f(x, y)$, $\dot{y} = By + g(x, y)$ (@) (as in W.12) $\Rightarrow$
    $\dot{x} = Ax + f(x, h(x))$, $h'(x)\dot{x} = Bg + g(x, h(x))$ (@@)
    If we take $(x_0, y_0 = h(x_0))$ as an initital condition to (@@), then the solution $y(t), x(t)$ satisfy $y(t) = h(x(t))$
56. **Theorem (existence)** For (@) there exists a local center manifold $y = h(x)$, $||x|| < \varepsilon$.
57. **Theorem** Suppose that zero solution of the reduced system is stable (asymtotically stable) or unstable, the same is for (@).
58. **Theorem** $(x(t), y(t))$ - solution of (@), then there exists $u(t)$ - solution of the reduced system such that $x(t) = u(t) + O(e^{-\gamma t})$, $y(t) = h(u(t)) + O(e^{-\gamma t})$.

Wykład 14, *19.01.2011*

59. **Krasnoselski Theorem** Assumptions: $\lambda(0) = 0$, $\frac{d}{d\mu}\lambda(\mu)|_{\mu=0} = 0$. If λ is of odd multiplicity, then we have a bifurcation of stationary solutions.

60. **Attractors** - they attract:
    - point attractor (stable equilibrium)
    - stable limit cycle
    - torus (an invariant set; it can be 2-diemensional or in general K-dimensional)

61. Maps, $f : I \to I$, sensitivity of initial conditions:
    - **logistic map** $x \mapsto \alpha x(1-x)$, $x \in [0,1]$, $\alpha \in [0,4]$
    - **tent map** $x \mapsto^S 10xmod1$, $[0,1) \to [0,1)$:
      x - a rational number - periodic trajectory,
      x - an irrational number - nonperiodic trajectory (strange/chaotic trajectory, $S^n(x)$).

62. **Rössler attractor**.

63. **Fractal sets** e.g. Cantor set.
    Fractal dimension – Hausdorff dimension. $N(r) \sim r^{-D}$ – D is a fractal dimension.

64. **Twierdzenie Szarkowskiego** Niech $f : J \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $J \subseteq \mathbb{R}$ to domknięty odcinek lub cała prosta $\mathbb{R}$. Jeśli f ma punkt okresowy o okresie k oraz $k \lhd l$ w porządku Szarkowskiego, to f ma punkt okresowy o okresie l.

65. **Twierdzenie Li-Yorke'a** Niech $f : J \to J$ będzie funkcją ciągłą, a $J \subseteq \mathbb{R}$ przedziałem domkniętym. Przypuśćmy, że funkcja f ma punkt okresowy o okresie równym 3 i orbicie $a \to b \to c \to a$ dla $a < b < c$ lub $a > b > c$. Wówczas dla każdej liczby naturalnej $k \in \mathbb{N}$ istnieje w J punkt okresowy o okresie k.