A. Definicje

1. $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ (argument z - każdy kąt θ spełniający tę równość; każde dwa argumenty z różnią się o całkowitą wielokrotność 2π). Ponadto dla $z_n \to z_0 \Leftrightarrow Rez_n \to Rez_0,\ Imz_n \to Imz_0$.

2. Formuła de Moivre'a: $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$, w szczególności: $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$.

3. Eksponenta - exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, t. że $expz = e^z = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$; $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Funkcje trygonometryczne, $z \in \mathbb{C}$: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $((\cos z)' = -\sin z,\ (\sin z)' = \cos z)$.

5. Funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ określona na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in U$ ma w z_0 pochodną $f'(z_0 \in \mathbb{C}$, jeśli $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$ (równoważnie $f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)h + \alpha(h)$, gdzie $\lim_{h\to 0} \frac{|\alpha(h)|}{|h|} = 0$).

6. Funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ określona na zbiorze zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$ jest holomorficzna, jeśli ma pochodną w każdym punkcie zbioru U, tzn. jest różniczkowalna na U.

7. Gałąź argumentu w zb. otw. $U \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ - f. ciągła $\varphi : U \to \mathbb{R}$ t. że $z = |z|(\cos\varphi(z) + i\sin\varphi(z))$, dla $z \in U$.

8. Gałąź główna argumentu - f. $Arg : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \to (-\pi,\pi)$ (gdzie $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} : t \leqslant 0\}$ przyporządkowująca liczbie zespolonej $z \notin \mathbb{R}_-$ jedyną liczbę z przedziału $(-\pi,\pi)$, która jest argumentem z, jest ciągła, a więc jest gałęzią argumentu w zbiorze $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

9. Gałąź logarytmu w zb. otw. $U \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ - f. ciągła $L : U \to \mathbb{C}$ t. że $exp(L(z)) = z$, dla $z \in U$.

10. Gałąź główna logarytmu - f. $Log : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ określona: $Logz = ln|z| + iArgz$, gdzie Arg jest gałęzią główną argumentu.

11. Gałąź główna potęgi zespolonej o wykładniku w - f. określona na $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ wzorem: $z^w = exp(wLogz)$.

12. Całka funkcji $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ - f. φ jest całkowalna w sensie Riemanna, jeśli obie funkcje $Re\varphi$, $Im\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna i całkę określamy wówczas wzorem: $\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b Re\varphi(t)dt + i\int_a^b Im\varphi(t)dt$.

13. Funkcja ciągła $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ kawałkami gładka - jeśli istnieje podział $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ przedziału $[a,b]$ t. że wewnątrz każdego przedziału (a_j, a_{j+1}) f. u ma ciągłą pochodną i istnieją skończone granice $\lim_{t\to a_j^+} u'(t)$ oraz $\lim_{t\to a_{j+1}^-} u'(t)$, w szczególności określona jest całka Riemanna $\int_a^b u'(t)dt$.

14. Droga kawałkami gładka - f. ciągła $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, której cz. rzeczywista $Re\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ i urojona $Im\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ są kaw. gł. (droga γ pętlą, jeśli $\gamma(a) = \gamma(b)$). Długość drogi kaw. gł. γ określamy: $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ ($|\gamma'| = \sqrt{(Re\gamma')^2 + (Im\gamma')^2}$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna).

15. Całka ciągłej f. zespolonej $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ wzdłuż drogi kaw. gł. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$: $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$. (to co pod całką jest całkowalne w sensie Riemanna na [a,b]).

16. F. holo. $F : U \to \mathbb{C}$ jest f. pierwotną na U dla $f : U \to \mathbb{C}$ ciągłej na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, jeśli $F'(z) = f(z)$, dla $z \in U$.

17. Pętle γ_0, $\gamma_1 : [a,b] \to U$ są homotopijne w $U \subset \mathbb{C}$, jeśli istnieje f. ciągła $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ t. że $H(s,0) = \gamma_0(s)$, $H(s,1) = \gamma_1(s)$ oraz $H(a,t) = H(b,t)$, dla $t \in [0,1]$ (tzn. każda droga $\gamma_t(s) = H(s,t)$ jest pętlą).

18. Ciąg funkcji $f_n : U \to \mathbb{C}$ na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, jeśli dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$ ciąg obcięć $(f_n|K)_{n=1}^\infty$ zbiega na K jednostajnie do obcięcia $f|K$, tzn. $||f_n - f||_K = \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in K\} \to 0$. Szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n$ jest zbieżny niemal jednostajnie, jeśli ciąg sum częściowych jest zbieżny niemal jednostajnie.

19. z_0 jest zerem krtoności m funkcji f - jeśli f. holo. f określona w otoczeniu z_0 zeruje się w z_0 i $f^{(m)}(z_0)$ jest pierwszą niezerową pochodnąf w z_0.

20. Indeks pętli γ względem punktu z_0 (gdzie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ - pętla kaw. gł. omijająca z_0) - liczba całkowita $Ind(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \frac{\Delta_{arg}(\gamma - z_0)}{2\pi}$, gdzie $(\gamma - z_0)(t) = \gamma(t) - z_0$. Jeśli kaw. gł. pętle γ_1, $\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ są homotopijne w $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$, to $Ind(\gamma_1, z_0) = Ind(\gamma_2, z_0)$.

21. Przekształcenie $f : W_1 \to W_2$ między zbiorami otw. w $\mathbb{C}$ jest konforemne, jeśli jest holo. i wzajemnie jednoznczne.

22. Niech $U \subset \mathbb{C}$ - zb. otw. $z_0 \in U$ i niech $f : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ - f. holo. Wówczas: (1) jeśli istnieje granica $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$, $a \in \mathbb{C}$, mówimy, że f ma w z_0 osobliwość pozorną; (2) jeśli istnieje granica $\lim_{z\to z_0} |f(z|) = +\infty$, $a \in \mathbb{C}$, mówimy, że f ma w z_0 biegun; (3) jeśli nie zachodzi ani (1) ani (2), mówimy, że f ma w z_0 osobliwość istotną.

23. Rząd bieguna z_0 funkcji f - l. naturalna $m \geqslant 1$ t. że $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) = a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$. Jeśli $m = 1$, biegun z_0 nazywamy beigunem prostym.

24. F. holo $f : U\backslash B \to \mathbb{C}$ jest meromorficzna na U (gdzie $U \subset \mathbb{C}$ - zb. otw., $B \subset U$ - zb. nie mający w U punktów skupienia), jeśli w każdym punkcie $b \in B$ ma biegun.

25. Residuum funkcji f w punkcie b_0 określamy następująco (gdzie $U \subset \mathbb{C}$ - zb. otw.; $B \subset U$ - zb. bez punktów skupienia w U; $f : U\backslash B \to \mathbb{C}$ - f. holo): dla dowolnego koła domkniętego $D = \{z : |z - b| \leqslant r\} \subset U$, $r > 0$, $D \cap B = \{b\}$, $Res(f, b) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)dz$.

26. Obszar jednospójny w $\mathbb{C}$ - otw. zb. spójny $U \subset \mathbb{C}$ t. że każda pętla w U jest homotopijna z pętlą stałą.

27. F. $u : U \to \mathbb{R}$ jest harmoniczna (gdzie $U \subset \mathbb{C}$), jeśli ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu i spełnia równanie Laplace'a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

B. Twierdzenia

1. Zał. $z = a + ib$, $a = Rez$, $b = Imz$.
   Teza $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = e^a(\cos b + i \sin b)$.

2. $exp(z_1 + z_2) = expz_1 \cdot expz_2$.

3. Tw. Cauchy-Riemanna
   Zał. $f : U \to \mathbb{C}$ - f. określona na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + iv(z)$, $u = Ref$, $v = Imf$ i $u, v : U \to \mathbb{R}$ rozpatrywane jako f. zmiennych rzeczywistych mają na U ciągłe pochodne cząstkowe.
   Teza f jest funkcją holo. na U $\Leftrightarrow$ gdy spełnione są równania Cauchy-Riemanna: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Ponadto $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z)$.

4. $(expz)' = expz$.

5. Każda gałąź logarytmu $L : U \to \mathbb{C}$ w zb.otw. $u \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ jest f. holo. i $L'(z) = \frac{1}{z}$, dla $z \in U$.

6. Zał. $f : U \to \mathbb{C}$ - f. ciągła na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$; F - f. pierwotna dla f na U
   Teza Dla każdej drogi kaw. gł. $\gamma : [a, b] \to U$ zachodzi $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

7. Tw. Goursata
   Zał. $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$
   Teza Dla każdego trójkąta $T \subset U$, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

8. Wzmocnienie tw. Goursata - lemat
   Zał. $f : U \to \mathbb{C}$ - f. ciągła na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in U$.
   Teza Jeśli dla każdego trójkąta $T \subset U\backslash\{z_0\}$, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$, to także dla dowolnego trójkąta $K \subset U$, $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$.

9. Tw. Cauchy'ego
   Zał. $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo. na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, $D = \{z : |z - z_0| \leqslant r\} \subset U$
   Teza Dla każdego z z wnętrza koła D: (1) $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dw$, (2) $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$, $n = 1, 2, \ldots$ W szczególności f. holo jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy.

10. Formuła Leibniza - lemat
    Zał. $K \subset \mathbb{C}$ - zb. zwarty, $U \subset \mathbb{C}$ - zb. otwarty, $F : K \times U \to \mathbb{C}$ - f. ciągła t. że dla każdego $w \in K$ pochodna cząstkowa $\frac{\partial}{\partial z}F(w, z)$ jest określona na U i f. $\frac{\partial}{\partial z}F : K \times U \to \mathbb{C}$ - ciągła
    Teza Dla dowolnej kaw. gł. drogi $\gamma : [a, b] \to K$: $\frac{d}{dz}\int_\gamma F(w, z)dw = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z}F(w, z)dw$.

11. Tw. Morery
    Zał. $f : U \to \mathbb{C}$ - f. ciągła na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$
    Teza Jeśli dla każdego trójkąta $T \subset U$, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$, to f jest f. holo.

12. Tw. Weierstrassa
    Zał. $f_n : U \to \mathbb{C}$ - ciąg f. holo. na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, zbieżny niemal jednostajnie do f. $f : U \to \mathbb{C}$
    Teza f jest f. holo. i ciąg pochodnych $f'_n : U \to \mathbb{C}$ jest zbieżny niemal jednostajnie do pochodnej $f' : U \to \mathbb{C}$.

13. Tw. Cauchy'ego-Hadamarda
<u>Zał.</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ - szereg potęgowy, $a_n \in \mathbb{C}$
<u>Teza</u> Promień zbieżności $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$, $0 \leqslant R \leqslant +\infty$ tego szeregu ma następujące własności: (1) szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ jest zbieżny niemal jednostajnie w kole otw. $\{z : |z-z_0| < R\}$ i jest rozbieżny w każdym punkcie $|z-z_0| > R$; (2) suma szeregu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ jest f. holo. w kole $\{z : |z-z_0| < R\}$ i $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, tzn. szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ jest szeregiem Taylora dla f. f w tym kole.

14. <u>Zał.</u> $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo. na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $D = \{z : |z-z_0| < r\} \subset U$
<u>Teza</u> $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, dla $z \in D$.

15. Zasada identyczności - lemat pomocniczy
<u>Zał.</u> $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ - suma szeregu potęgowego o dodatnim promeiniu zbieżności R, określona w kole $\{z : |z-z_0| < R\}$
<u>Teza</u> Jeśli f nie jest tożsamościowo równa zeru, to istnieje otoczenie V punktu z_0 t. że $f(z) \neq 0$ dla $z \in V \backslash \{z_0\}$.

16. Zasada identyczności
<u>Zał.</u>$U \subset \mathbb{C}$ - otw. zbiór spójny
<u>Teza</u> Jeśli f. holo. $f, g : U \to \mathbb{C}$ pokrywają się na zbiorze, który ma w U punkt skupienia to $f = g$.

17. Lemat
<u>Zał.</u> $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo. na otw. zb. spójnym U, $f(z_0)$=0 i f nie jest stale równa zeru na U
<u>Teza</u> Nie wszystkie pochodne f w z_0 są równe zeru i jeśli $f^{(m)}(z_0)$ jest pierwszą niezerową pochodną f w z_0, mamy $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ i $g(z_0) \neq 0$.

18. <u>Zał.</u> $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo. na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, nie zerująca się na żadnej składowej zb. U, $K \subset U$ - zb. zwarty
<u>Teza</u> f można zapisać w psotaci $f(z) = (z-z_1)^{m_1} \dots (z-z_k)^{m_k} g(z)$, gdzie $z_1, \dots, z_k \in K$ są zerami f o krotnościach odpowiednio $m_1, \dots, m_k$ oraz $g : U \to \mathbb{C}$ jest f. holo. nie zerującą się w żadnym punkcie zb. K.

19. Lemat
<u>Zał.</u> $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ - ciągła droga omijająca 0
<u>Teza</u> Istnieje ciągła droga $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ t. że $exp\lambda(t) = \gamma(t)$ dla $t \in [a,b]$. Przy tym, jeśli γ jest kaw. gł., to także λ jest kaw. gł.

20. Lemat
<u>Zał.</u> $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ - droga kawłakami gł.
<u>Teza</u> $\int_\gamma \frac{dz}{z} = ln|\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)}| + i\Delta_{arg}(\gamma)$ (jeśli γ jest pętlą, $\gamma(a) = \gamma(b)$, to $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{\Delta_{arg}(\gamma)}{2\pi}$ jest liczbą całkowitą.)

21. <u>Zał.</u> $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo. w zb. otw. mająca skończenie wiele zer $z_1, \dots z_k$ w U, prz czym m_j jest krotnością zera z_j
<u>Teza</u> Dla dowolnej kaw. gł. pętli $\gamma : [a,b] - \to U \backslash \{z_1, \dots, z_k\}$, homotopijnej w U z pętlą stałą, mamy $Ind(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{k} m_j Ind(\gamma, z_j)$.

22. Tw. Rouché
<u>Zał.</u> $U \subset \mathbb{C}$ - otw. zb. spójny, $\gamma : [a,b] \to U$ - pętla kaw. gł., homotopijna w U z z pętlą stałą; $f, g : U \to \mathbb{C}$ - f. holo. t. że $|g(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))|$ dla $t \in [a,b]$ oraz $Ind(\gamma, z) = 1$, jeśli $f(z) = 0$ lub $g(z) = 0$
<u>Teza</u> $N_f = N_g$, gdzie N_f i N_g są odpowiednio liczbami zer funkcji f i g, liczonych wraz z krotnościami.

23. <u>Zał.</u> $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo. w zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, $f(z_0) = w_0$ i z_0 jest zerem krotności n f. $f - w_0$
<u>Teza</u> Istnieją $r > 0$ i $d > 0$ t. że jeśli $0 < |w - w_0| < d$ to równanie $f(z) = w$ ma w kole $\{z : |z-z_0| < r\}$ dokładnie n pierwiastków, każdy o krotności 1.

24. <u>Zał.</u> $U \subset \mathbb{C}$ - zb. otw., $z_0 \in U$; $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ - f. holo
<u>Teza</u> (1) f ma w z_0 osobliwość pozorną $\Leftrightarrow$ gdy $\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$; (2) n.w.s.r.: (i) f ma w z_0 biegun; (ii) istnieje wielomian W stopnia $m \geqslant 1$ t. że f. $f(z) - W(\frac{1}{z-z_0})$ ma w z_0 osobliwość pozorną; (3) dla l. naturalnej $m \geqslant 1$ $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = a$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$.

25. Szczególny przypadek tw. o resiudach - lemat
<u>Zał.</u> W - wielomian; $b \in \mathbb{C}$; $W^{(b)} = W(\frac{1}{z-b})$
<u>Teza</u> Dla każdej pętli kaw. gł. $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \backslash \{b\}$, $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma W(\frac{1}{z-b}) dz = Res(W^{(b)}, b) \cdot Ind(\gamma, b)$.

26. Tw. o residuach
<u>Zał.</u> $U \subset \mathbb{C}$ - zb. otw. $B \subset U$ - zb. skończony; $f : U \backslash B \to \mathbb{C}$ - f. mero. w U
<u>Teza</u> Dla każdej pętli kaw. gł. $\gamma : [\alpha, \beta] \to U \backslash B$, homotopijnej w U z pętlą stałą $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{b \in B} Res(f, b) \cdot Ind(\gamma, b)$.

27. Zasada argumentu (uogólnienie tw. 21)
<u>Zał.</u> $U \subset \mathbb{C}$ - zb. otw.; $B \subset U$ - zb. skończony; $f : U \backslash B \to \mathbb{C}$ - f. mero. w U, mająca skończony zbiór zer $Z = \{z \in U \backslash B : f(z) = 0\}$; $n(a)$ - krotność zera $a \in Z$; $m(b)$ - rząd bieguna $b \in B$
<u>Teza</u> Dla dowolnej pętli kaw. gł. $\gamma : [\alpha, \beta] \to U \backslash (B \cup Z)$, homotopijnej w U z pętlą stałą, mamy: $Ind(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z} n(a) \cdot Ind(\gamma, a) - \sum_{b \in B} m(b) \cdot Ind(\gamma, b)$.

28. Tw. Casoratiego - Weierstrassa
<u>Zał.</u> $U \subset \mathbb{C}$ - zb. otw., $z_0 \in U$; $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ - f. holo.
<u>Teza</u> Jeśli f nie ma w z_0 ani osobliwości pozornej, ani tez bieguna, to dla każdego $w \in \mathbb{C}$ istnieje ciąg $z_n \in U \backslash \{z_0\}$ t. że $z_n \to z_0$ i $f(z_n) \to w$.

29. Funkcja $f : P \to \mathbb{C}$ holo. w pierścieniu $P = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant +\infty$, rozwija się w szereg Laurenta $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$, gdzie (1) oba szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$ są zbieżne w pierścieniu P niemal jednostajnie; (2) dla każdego $r \in (R_1, R_2)$ oraz koła $D_r = \{z : |z - z_0| < r\}$, $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$. W szczególności rozwiniecie w szereg Laurenta w pierścieniu P funkcji f jest jednoznaczne.

30. Lemat Schwarza
<u>Zał.</u> $f : D \to D$ - f. holo. koła $D = \{z : |z| < 1\}$ w siebie zachowująca zero, $f(0) = 0$
<u>Teza</u> $|f(z)| \leqslant |z|$ dla $z \in D$ i $|f'(0)| \leqslant 1$. Ponadto, jeśli dla pewnego $z_0 \neq 0$, $|f(z_0| = |z_0|$, lub też $|f'(0)| = 1$, to istnieje $\theta \in \mathbb{R}$ t. że $f(z) = e^{i\theta} z$, dla $z \in D$.

31. Każda f. holo. $f : U \to \mathbb{C}$ w obszarze jednospójnym $U \subset \mathbb{C}$ ma w U funkcję pierwotną.

32. Tw. Montela
Z każdego ciągu $f_n : U \to \mathbb{C}$ f. holo., wspólnie ograniczonych na U, $|f_n(z)| \leqslant M$ dla $z \in U$, $n = 1, 2, \ldots$, można wybrać podciąg zbieżny na U niemal jednostajnie.

33. Tw. Hurwitza
<u>Zał.</u> $f_n : U \to \mathbb{C}$ - ciąg f. holo. zbieżny niemal jednostajnie na otw. zb. spójnym $U \subset \mathbb{C}$ do f. $f_0 : U \to \mathbb{C}$
<u>Teza</u> Jeśli wszystkie funkcje f_n, $n = 1, 2, \ldots$ są różnowartośćiowe, to granica f_0 jest albo stała, albo różnowartościowa.

34. Tw. Riemanna
Dla każdego obszaru jednospójnego $U \subset \mathbb{C}$, $U \neq \mathbb{C}$ istnieje przekształcenie konforemne $f : U \to D$ na koło $D = \{z : |z| < 1\}$. Ponadto, dla ustalonego $z_0 \in U$, istnieje dokładnie jedno takie przekształcenie konforemne spełniające dodatkowo warunki $f(z_0 = 0$ i $f'(z_0 = Ref'(z_0) > 0$.

35. Lemat pomocniczy
<u>Zał.</u> $U \subset \mathbb{C} \backslash \{c\}$ - obszar jednospójny, $z_0 \in U$ i $D = \{z : |z| < 1\}$
<u>Teza</u> Istnieje przekształcenie konforemne $g : U \to g(U)$, t. że $g(U) \subset D$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) = Reg'(z_0) > 0$.

36. Lemat pomocniczy
<u>Zał.</u> $W \subset D = \{z : |z| < 1\}$ - obszar jednospojny zawierający zero, $a \in D \backslash W$
<u>Teza</u> Istnieje przekształcenie konforemne $\psi : W \to \psi(W) \subset D$ t. że $\psi(0) = 0$ oraz $\psi'(0) = \frac{1 + |a|}{2\sqrt{|a|}} > 1$.

37. <u>Zał.</u> $U \subset \mathbb{C}$ - obszar jednospójny
<u>Teza</u> Dla każdej f. harmonicznej $u : U \to \mathbb{R}$ istnieje f. holo. $f : U \to \mathbb{C}$ t. że $u = Ref$ (f. $v = Imf$ nazywa się funkcją harmonicznie sprzężoną z u na zb. U).

38. Tw. o wartości średniej
<u>Zał.</u> $u : U \to \mathbb{R}$ - f. harmoniczna na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, $D = \{z : |z - a| \leqslant r\} \subset U$
<u>Teza</u> $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt$.

C. Wnioski

1. Jeśli f. ciągła $f : U \to \mathbb{C}$ ma na U f. pierwotną, to dla każdej kaw. gł. pętli $\gamma : [a, b] \to U$, $\int_\gamma f(z) dz = 0$ (np. gdy f wielomianem $W(z) = a_0 + a_1(z) + \ldots a_n z^n$; dla pętli $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $f(z) = \frac{1}{z}$ ma f. pierwotnej w pierścieniu $\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$, bo $\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i$).

2. <u>Zał.</u> $W \subset \mathbb{C}$ - otw. zb. wypukły, $f : W \to \mathbb{C}$ - f. ciągła t. że dla każdego trójkata $T \subset W$, $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$
<u>Teza</u> f ma f. pierwotną na W. W szczególności każda f. holo. na W ma na W f. pierwotną.

3. Zał. $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$
Teza Jeśli kaw. gł. pętle $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U$ są homotopijne w U to $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$.

4. Teza poprzedniego wn. pozostaje prawdziwa, jeśli zakłada się jedynie, że $f : U \to \mathbb{C}$ - f. ciągła t. że dla pewnego $z_0 \in U$, holo. na $U \backslash \{z_0\}$.

5. Nierówność Cauchy'ego
Jeśli $f : U \to \mathbb{C}$ jest f. holo. na zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$, $D = \{z : |z - z_0| \leqslant r\} \subset U$ i $M = \sup\{|f(z)| : z \in \partial D\}$, to dla $n = 1, 2, \ldots$ $|f^{(n)}(z_0| \leqslant \frac{n!}{r^n} M$.

6. Tw. Liouville'a
Jeśli funkcja holo. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest ograniczona to jest stała.

7. Zasada maksimum modułu
Zał. $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo. na zb. otw. i spójnym $U \subset \mathbb{C}$
Teza Jeśli istnieje $w \in U$ t. że $|f(w)| \geqslant |f(z)|$ dla $z \in U$, to f. f jest stała.

8. Zał. Niech $U \subset \mathbb{C}$ - zb. otw. $z_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ - f. ciągła
Teza Jeśli f jest różniczkowalna w każdym punkcie $z \in U \backslash \{z_0\}$ to jest też różniczkowalna w z_0.

9. Zał. $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo., $D = \{z : |z - z_0| \leqslant r\} \subset U$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$
Teza Jeśli f nie przyjmuje zera na ∂D i N_f jest liczbą zer f w kole otwartym $D \backslash \partial D$, z których każde liczone jest tyle razy, ile wynosi jego krtoność, to $N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Ind(f \circ \gamma, 0)$.

10. F. holo., która nie jest stała na żadnym zb. otw., przekształca zb. otw. na zb. otw.

11. Zał. $f : W \to \mathbb{C}$ - f. holo. na zb. otw. $W \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in W$ i $f'(z_0 \neq 0$
Teza Istnieje otw. otoczenie W_1 punktu z_0 t. że obcięcie $f|W_1 : W_1 \to f(W_1)$ jest przekształceniem konforemnym na zb. otw. $f(W_1)$.

12. Zał. $f : P \to \mathbb{C}$ - f. holo. w pierścieniu $P = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$; $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ - rozwinięcie f w szereg Laurenta w tym pierścieniu
Teza (1) f ma w z_0 osobliwość pozorną $\Leftrightarrow$ gdy $0 = a_{-1} = a_{-2} = \ldots$; (2) f ma w z_0 biegun rzędu m $\Leftrightarrow$ gdy $a_{-m} \neq 0$ oraz $0 = a_{-m-1} = a_{-m-2} = \ldots$; (3) f ma w z_0 osobliwość istotną $\Leftrightarrow$ gdy $a_{-n} \neq 0$ dla nieskończenie wielu n.

13. Każde przekształcenie konforemne $f : D \to D$ koła $D = \{z : |z| < 1\}$ na siebie jest postaci $f(z) = e^{i\theta} \varphi_a(z)$, gdzie $\theta \in \mathbb{R}$ i $f(a) = 0$.

14. Zał. $U \subset \mathbb{C}$ - obszar jednospójny; $f : U \to \mathbb{C}$ - f. holo. nie przyjmująca wartości zero
Teza Istnieje f. holo. $g : U \to \mathbb{C}$ t. że $exp(g) = f$.

15. W każdym obszarze jednospójnym nie zawierającym zera istnieje gałąź logarytmu ($L : U \to \mathbb{C}$, $exp(L(z)) = z$).

16. Jeśli $f : U \to \mathbb{C}$ jest f. holo. na zb. jednospójnym U, nie przyjmującą na U wartości zero, to istnieje f. holo. $h : U \to \mathbb{C}$ t. że $f = h^2$.

17. Zasada maksimum dla f. harmonicznych
Zał. $u : U \to \mathbb{R}$ - f. harmoniczna na otw. zb. spójnym, $U \subset \mathbb{C}$
Teza Jeśli dla pewnego $a \in U$, $u(a) \geqslant u(z)$ dla $z \in U$, to f. u jest stała na U.

D. Uwagi

1. Formuła Eulera: $e^{i\pi} = -1$.

2. Liczby zespolone z spełniające warunek $e^z = w$, gdzie $w \neq 0$ są opisane: $z = ln|w| + i\theta$, gdzie θ jest argumentem w (w różnią się o całkowitą wielokotność $2\pi i$.

3. Utożsamiając liczby zespolone z punktami $\mathbb{R}^2$ możemy rozpatrywać $f : U \to \mathbb{R}^2$. Pochodna f w $z_0 \in U$ w sensie rzeczywistym jest przekształceniem liniowym $df(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Istnienie pochodnej zespolonej znacza różniczkowalność w sensie rzeczywistym i dodatkowo warunek, że przekształcenie liniowe $df(z_0)$ jest operacją mnożenia przez liczbę zespoloną: $df(z_0)(h) = f'(z_0) \cdot h$, gdzie $f'(z_0) = a + ib$, $h = h_1 + ih_2$.

4. Reguły różniczkowania funkcji zespolonych są analogiczne do reguł różniczkowania funkcji rzeczywistych: $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$; $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$; $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g^2(z_0)}$; $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g(z_0)$. Ponadto, jeśli $f : U \to \mathbb{C}$ holo. w zb. otw. $U \subset \mathbb{C}$ i $\varphi : (a, b) \to U$ jest f. różniczkowalną zmiennej rzeczywistej, $\varphi'(t) = (Re\varphi)'(t) = i(Im\varphi)'(t)$, to: $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

5. W pierścieniuu $U = \{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ nie istnieje gałąź argumentu.
6. Jeśli $\varphi : U \to \mathbb{R}$ jest gałęzią argumentu, to $L(z) = ln|z| + i\varphi(z)$ jest gałęzią logarytmu w U.
7. Jeśli $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ są całkowalne w sensie Riemanna i $w \in \mathbb{C}$, to: $\int_a^b (\varphi_1(t)+w\varphi_2(t))dt = \int_a^b \varphi_1(t)dt + w\int_a^b \varphi_2(t)dt$ oraz $|\int_a^b \varphi(t)dt| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|dt$.
8. Jeśli $T : [c, d] \to [a, b]$ jest kaw. gł. homeomorfizmem, to droga $\gamma \circ \tau : [c, d] \to \mathbb{C}$ jest kaw. gł. i $\int_{\gamma\circ\tau} f(z)dz = (*) = \int_\gamma f(z)dz$, jeśli τ nie zmienia orientacji albo $(*) = \int_\gamma f(z)dz$ wpp.
9. Całka wzdłuż zorientowanej łamanej w $\mathbb{C}$ ($\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$, $t \in [0, 1]$ - standardowa parametryzacja odcinka $[z_0, z_1] \subset \mathbb{C}$ i przyjmujemy $\int_{[z_0,z_1]} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz = (z_1 - z_0)\int_0^1 f(z_0 + t(z_1 - z_0))dt$, gdzie $f : [z0, z_1] \to \mathbb{C}$, f - ciągła).
10. Całka wzdłuż zorientowanego brzegu koła w $\mathbb{C}$ ($\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ - standardowa parametryzacja okręgu $\partial D = \{z : |z - z_0 = r\}$ i przyjmujemy $\int_{\partial D} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz = ir\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})e^{it}dt$, gdzie $f : \partial D \to \mathbb{C}$, f - ciągła; w szczególności $\int_{\partial D} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$).
11. Niech $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ - droga kaw. gł. i $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ - f. ciągła. Wówczas $|\int_\gamma f(z)dz| \leqslant l(\gamma)\cdot\sup\{|f(z)| : z \in \gamma([a, b])\}$.
12. Z tw. Liouville'a wynika natychmiast zasadnicze tw. algebry.
13. <u>Zał.</u> $f_n : U \to \mathbb{C}$ - ciąg f. ciągłych zbieżny niemal jednostajnie do $f : U \to \mathbb{C}$, U -zb. otw. w $\mathbb{C}$
<u>Teza</u> (1) f jest f. ciągłą; (2) dla każdej kaw. gł. drogi $\gamma : [a, b] \to U$, $\int_{\gamma_n} f(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$.
14. M-test Weierstrassa
Jeśli dla ciągu $f_n : K \to \mathbb{C}$ f. ogarniczonych szereg $\sum_n ||f_n||_K$ norm $||f_n||_K = \sup\{|f_n(z)| : z \in K\}$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_n f_n$ jest zbieżny jednostajnie na K.
15. Rozwinięcia w szereg, $z \in \mathbb{C}$: $expz = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$; $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. W kole $|z - 1| < 1$, gałęzi głównej logarytmu: $Log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{z^n}{(n}$, $|z| < 1$.
16. Niech $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C}$ - drogi opisane w tw. 19, $\gamma = exp\lambda = e^{Re\lambda} \cdot e^{iIm\lambda}$. Wówczas $Re\lambda = ln|\gamma|$ oraz dla każdego $t \in [a, b]$ $Im\gamma(t)$ jest argumentem liczby zespolonej $\gamma(t)$. Liczbę rzeczywistą $\Delta_{arg}(\gamma) = Im\lambda(b) - Im\lambda(a)$ nazywać będziemy przyrostem argumentu wzdłuż drogi γ. Zauważmy, że $\Delta_{arg}(\gamma)$ nie zależy od wyboru λ oraz, że jeśli $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, są drogami, $\lambda_1, \lambda_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ i $\gamma_j = exp\lambda_j$, to $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = exp(\lambda_1 + \lambda_2)$, więc otrzymujemy: $\Delta_{arg}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \Delta_{arg}(\gamma_1) + \Delta_{arg}(\gamma_2)$.
17. Założenie $|g \circ \gamma - f \circ \gamma| < |f \circ \gamma|$ zapewnia, że pętla γ nie przechodzi przez żadne zero funkcji f lub g. Ponadto, f i g mają tylko skończenie wiele zer.
18. Jeśli f. f holo. w otoczeniu z_0 ma w z_0 zero krotności n, to istnieje otoczenie W punktu z_0 t. że dla każdego $z \in W\backslash\{z_0\}$, $f(z) \neq 0$ i $f'(z) \neq 0$.
19. <u>Zał.</u> $f : W_1 \to W_2$ - przekształcenie konforemne między zb. otw. $W_1, W_2 \subset \mathbb{C}$
<u>Teza</u> (1) z Wn. 10 wynika, że f jest homeomorfizmem W_1 na W_2; (2) z tw. 24 wynika, że $f'(z) \neq 0$ dla $z \in W_1$; (3) przekształcenie odwrotne $f^{-1} : W_2 \to W_1$ jest konforemne.
20. (1) Jeśli f ma w b biegun rzędu m, to $Res(f, b) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to b} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z - b)^m \cdot f(z))$; (2) niech $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, gdzie g i h są holo. w otoczeniu b, $g(b) \neq 0$ i h ma w b zero krotności m. Wówczas f ma w b biegun rzędu m; (3) jeśli w (2), h ma w b zero jednokrotne, $h'(b) \neq 0$, to w b jest biegunem prostym f oraz $Res(f, b) = \frac{g(b)}{h'(b)}$.
21. Przykład osobliwości istotnej - f. $exp(\frac{1}{z})$ w zerze: dla $t \in \mathbb{R}$ mamy $\lim_{t\to 0^+} exp(\frac{1}{t}) = +\infty$ oraz $|exp(\frac{1}{it})| = |exp(-i\frac{1}{t})| = 1$, a więc f nie ma w zerze ani osobliwości pozornej, ani też bieguna.
22. <u>Zał.</u> $D = \{z : |z| < 1\}$; dla $a \in D$ $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $z \neq \frac{1}{a}$
<u>Teza</u> (1) f. φ_a jest holo. w kole $\{z : |z| < \frac{1}{|a|}\}$ zawierającym $\bar{D}$; (2)$\varphi_a(D) = D$, $\varphi_a(\partial D) = \partial D$, $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_a(0) = -a$; (3) $\varphi_a : D \to D$ jest przekształceniem konforemnym i $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}|D$; (4)$\varphi'_a(0) = 1 - |a|^2$, $\varphi'_a(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$.
23. <u>Zał.</u> $U \subset \mathbb{C}$ - obszar jednospójny
<u>Teza</u> Dla dowolnej f. holo. $f : U \to \mathbb{C}$ i $\gamma_1, \gamma_2 : [c, d] \to U$ dróg kaw. gł. o wspólnym początku i końcu ($\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$, $\gamma_1(d) = \gamma_2(d)$ mamy $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.
24. Jeśli $f : U \to \mathbb{C}$ jest f. holo., to z równań Cauchy-Riemanna wynika, że obie f. Ref i Imf są harmoniczne.

E.Dowody

- Tw. 3 Cauchy-Riemanna
Istnienie ciągłych pochodnych cząstkowych gwarantuje istnienie pochodnej rzeczywistej $df(z)$ w każdym punkcie $z \in U$. Istnienie pochodnej $\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, co jest równoważne równaniom C-R. Ponieważ $f'(z_0) = a+ib$, to mamy drugą cz. tezy.

- Tw. 7 Goursata
Lemat: Dla każdego trójkąta $K \subset U$ można wybrać trójkąt $L \subset K$ t. że. $l(\partial L) = \frac{1}{2}l(\partial K)$ oraz $|\int_{\partial L} f(z)dz| \geqslant \frac{1}{4}|\int_{\partial K} f(z)dz|$.
Łącząc środki boków trójkąta K odcinkami dostajemy 4 przystające trójkąty K_1, K_2, K_3, K_4, t. że $l(\partial K_j = \frac{1}{2}l(\partial K)$ oraz $\int_{\partial K} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{K_j} f(z)dz$. Dla pewnego wskaźnika j mamy $|\int_{\partial K_j} f(z)dz| \geqslant \frac{1}{4}|\int_{\partial K} f(z)dz|$ i wybieramy $L = K_j$.
Z lematu można wybrać ciąg trójkątów $T = T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots$ t. że dla $j = 0, 1, \ldots$ $l(\partial T_{j+1}) = \frac{1}{2}l(\partial T_j)$ (1), $|\int_{\partial T_{j+1}} f(z)dz| \geqslant \frac{1}{4}|\int_{\partial T_j} f(z)dz|$. Zwartość trójkąta T gwarantuje istnienie $z_0 \in \bigcap_{j=0}^{\infty} T_j$ (2). $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)$ (3), $\lim_{z \to z_0} \frac{|\alpha(z)|}{|z-z_0|} = 0$. Ponieważ całka wielomianu po brzegu trójkąta znika dla $j = 0, 1, \ldots$ dostajemy $\int_{\partial T_j} f(z)dz = \int_{\partial T_j} \alpha(z)dz$ (4). Z (1) dla $j = 0, 1, \ldots$: $l(\partial T_j) = (\frac{1}{2})^j l(\partial T)$, $|\int_{\partial T} f(z)dz| \leqslant 4^j |\int_{\partial T_j} f(z)dz|$ (5). Ustalmy teraz dowolne $\epsilon > 0$ i korzystając z (3) wybierzmy $\delta > 0$ t. że $|\alpha(z)| \leqslant \epsilon|z - z_0|$, jeśli $|z - z_0| < \delta$. Wybierzmy następnie j t. że. $l(\delta T_j) < \delta$. Wówczas z (2) i (6): $|\alpha(z)| \leqslant \epsilon \cdot l(\delta T_j)$ dla $z \in \partial T_j$. Z (4), (5), (7) dostajemy $|\int_{\partial T} f(z)dz| \leqslant 4^j |\int_{\partial T_j} f(z)dz| = 4^j | \in_{\partial T_j} \alpha(z)dz| \leqslant 4^j \int_{\partial T_j} |\alpha(z)|dz \leqslant 4^j l(\partial T_j)^2 \cdot \epsilon$. Zatem z (5): $|\int_{\partial T} f(z)dz| \leqslant 4^j \frac{1}{4^j} l(\partial T)^2 \cdot \epsilon = \epsilon \cdot l(\partial T)^2$. Wobec dowolności ϵ, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

- Tw. 9 Cauchy'ego
Wzmocnimy najpierw Uw. 9, pokazując, że $\forall z \in D \backslash \partial D$ $\int_{\partial D} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$. W tym celu wybierzmy koło $K = \{w : |w - z| \leqslant d\} \subset D \backslash \partial D$. Niech$\gamma_0(s) = z_0 + re^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$ i niech $\gamma_1(s)$ będzie punktem na okręgu ∂K leżącym na odcinku $[z, \gamma_0(s)]$. Pętle γ_0 i γ_1 są homotopijne w $U \backslash \{z\}$ i f. $w \to \frac{1}{w-z}$ jest holo. w tym zb., zatem z Wn. 2 $\int_{\partial D} \frac{dw}{w-z} = \int_{\partial \gamma_0} \frac{dw}{w-z} = \int_{\partial \gamma_1} \frac{dw}{w-z} = \int_{\partial K} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$.
Teraz wybierzmy $R > r$ t. że koło otw. $W = \{w : |z_0 - w| < R\}$ jest zawarte w U. Ustalmy punkt $z \in D \backslash \partial D$ i rozpatrzmy f. $g : W \to \mathbb{C}$: $g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w-z}$ jeśli $w \neq z$ i $g(w) = f'(z)$ wpp. Funkcja g jest ciągła w kole W i holo. na $W \backslash \{z\}$. Zgodnie z Tw. 8, Wn. 2 i Wn. 1 $\int_{\partial D} g(w)dw = 0$. Zatem $\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dz = f(z) \int_{\partial D} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i f(z)$ (1).
Zastosujemy formułę Leibniza (Tw. 10) do f. $F_n(w, z) = \frac{f(w)}{(w-z)^n}$, $(w, z) \in \partial D \times (D \backslash \partial D)$, $n = 1, 2, \ldots$ Mamy $\frac{d}{dz} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{d}{dz} \int_{\partial D} F_1(w, z)dw = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial z} F_1(w, z)dw = \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$, czyli z (1) $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$.

- Tw. 11 Morery
Niech $z_0 \in U$ i $W = \{z : |z - z0| \leqslant r\} \subset U$, $r > 0$. Z Wn. 2 f ma f. pierwotną na W, tzn. $\exists$ f. holo. $F : W \to \mathbb{C}$ t. że $f = F'$. Z tw.9 F jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy, w szczególności F" jest pochodną f na W. Tak więc f. f jest różniczkowalna w z_0

- Tw. 12 Weierstrassa
Holo. f wynika natychmiast z Tw. 11 i Uw. 13: dla dowolnego trójkąta $T \subset U$, $0 = \int_{\partial T} f_n(z)dz \to \int_{\partial T} f(z)dz$, a więc $\int_{\delta T} f(z)dz = 0$.
Ustalmy dowolny zb. zwarty $K \subset U$ i niech $d = \inf\{|z - w| : z \in K, w \notin U\} > 0$ (1). Zb. zwarty K można pokryć skończenie wieloma kołami o środkach leżych w K i promieniu $\frac{d}{3}$, $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} C_j$, $C_j = \{z : |z - z_j| < \frac{d}{3}\}$, $z_j \in K$ (2) i niech $D_j = \{z : |z - z_j| \leqslant \frac{2}{3}d\}$, $E = D_1 \ldots \cup D_n$. Wówczas $C_j \subset D_j$ i $E \subset U$. Ze wzoru Cauchy'ego $\forall z \in C_j$ mamy:
$|f'(z) - f'_n(z)| = \frac{1}{2\pi}|\int_{\partial D_j} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw - \int_{\partial D_j} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}dw| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_j} \frac{|f(w) - f_n(w)|}{|w-z|^2}dw \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{||f - f_n||_{D_j}}{(\frac{1}{3}d)^2}(2\pi\frac{2}{3}d)$. Zatem z (2), (3): $||f' - f'_n||_K \leqslant \frac{6}{d}||f - f_n||_E$, a ponieważ E jest zwarty $||f - f_n||_E \to 0$, a więc $||f' - f'_n||_K \to 0$.

- Tw. 16 Zasada identyczności
Niech $h = f - g$ i niech $E = \{z \in U :$ h zeruje się w pewnym otoczeniu punktu z$\}$ (1). Zauważmy, że jeśli $h(z_n = 0$, $z_n \to z_0$, $z_0 \in U$, $z_n \neq z_0$ dla $n \neq 0$, to $z_0 \in E$ (2). Istatnie, h jest f. holo. na U, rozwija się, więc wokół z_0 w szereg potęgowy (Tw. 14), zatem zgodnie z Tw. 15, zeruje się w pewnym otoczeniu z_0. Stąd i zał. wynika także, że $E \neq \emptyset$. Z (2) wynika, że zbiór E zawiera wszystkie swoje punkty skupienia należące do U, a więc jest relatywnie domknięty w U. Jednocześnie z (1) E jest zbiorem otw., więc ze spójności U wnosimy, że $U = E$.

- Tw. 22 Rouché
Z założeń i Tw. 21 wynika, że $N_f = Ind(f \circ \gamma, 0)$, $N_g = Ind(g \circ \gamma, 0)$. Pozostaje spr., że pętle $f \circ \gamma$ i $g \circ \gamma$ są homotopijne

w $\setminus\{0\}$. Przyjmijmy $\gamma_0 = f \circ \gamma$, $\gamma_1 = g \circ \gamma$ i niech $H(s,t) = \gamma_0(s) + t(\gamma_1(s) - \gamma_0(s))$, $(s,t) \in [a,b] \times [0,1]$. Wówczas $|H(s,t| \geqslant |\gamma_0(s)| - t|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| > |\gamma_0(s)| - t|\gamma_0(s)| \geqslant 0$, a więc H jest homotopią w $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ między γ_0 i γ_1.

- Tw. 26 o residuach
Zgodnie z Tw. 25 $\forall b \in B$ można wskazać wielomian $W_b(z)$ t. że f. $f(z) - W_b(\frac{1}{z-b})$ ma w b osobliwość pozorną. Wówczas $g(z) = f(z) - \sum_{b\in B} W_b(\frac{1}{z-b})$ ma w każdym punkcie $b \in B$ osobliwość pozorną i g można rozszeryć na U do f. holo. przyjmując $g(b) = \lim_{z\to b} g(z)$. Ponieważ γ jest w U homotopijna z pętlą stała, więc $\int_\gamma g(z)dz = 0$ i z def. residuum i Tw. 26 wnosimy, że $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{b\in B} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma W_b(\frac{1}{z-b})dz = \sum_{b\in B} Res(W^{(b)}, b) \cdot Ind(\gamma, b)$. Stosując ten wzór do pętli $t \to b + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, obiegającej brzeg koła $D = \{z : |z-b| \leqslant r\} \subset U$ rozłącznego z $B\setminus\{b\}$ mamy też $Res(f,b) = Res(W^{(b)}, b)$. Stąd wynika tw. o residuach.

- Tw. 27 Zasada argumentu
Tak jak w dowodzie Tw. 26 $\forall b \in B$ można znaleźć wielomian $W_b(z)$ stopnia $m(b)$ t. że f. $g(z) = f(z) - \sum_{b\in B} W_b(\frac{1}{z-b})$ (1) ma w każdym punkcie $b \in B$ osobobliwość pozorną i przyjmując $g(b) = \lim_{z\to b} g(z)$, rozszerzamyy g do f. holo na U. Formułę (1) można zapisać w postaci $f(z) = \frac{h(z)}{\prod_{b\in B}(z-b)^{m(b)}}$ (2), gdzie $h : U \to \mathbb{C}$ - f. holo (przy czym $h(b) \neq 0$ dla $b \in B$, bo inaczej f miałoby w b biegun rzędu niższego niż m(b), Def. 23). Ponieważ h i f mają identyczne zera, z takimi samymi krotnościami $h(z) = \prod_{a\in Z}(z-a)^{n(a)})\varphi(z)$ (3), gdzie $\varphi : U \to \mathbb{C}$ jest f. holo na U, nie zerującą się w żadnym punkcie U (Tw. 18). Z (2) i (3) mamy więc $f(z) = (\prod_{a\in Z}(z-a)^{n(a)})(\prod_{b\in B}(z-b)^{m(b)})\varphi(z)$. Zatem na zbiorze $U\setminus(B \cup Z)$, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{a\in Z}\frac{n(a)}{z-a} - \sum_{b\in B}\frac{m(b)}{z-b} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ (4). Ponieważ γ jest homotopijna ze stałą w U i $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ jest holo. na U, $\int_\gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = 0$, zatem z (4) dostajemy $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in Z} n(a)Ind(\gamma, a) - \sum_{b\in B} m(b)Ind(\gamma, b)$. Pozostaje przypomnieć, że $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Ind(f \circ \gamma, 0)$.

- Tw. 28 Casoratiego-Weierstrassa
Zał. że dla pewnego $w_0 \in \mathbb{C}$ nie istnieje ciąg $z_n \to z_0$ t. że $f(z_n) \to w_0$. To oznacza, że dla pewnych liczb dodatnich d,r, (1) jeśli $0 < |z - z_0| < r$, to $|f(z) - w_0| \geqslant d$. Rozpatrzmy koło $D = \{z : |z - z_0| < r\}$ i funkcję $h : D\setminus\{z_0 \to \mathbb{C}$ określoną formułą $h(z) = \frac{1}{f(z)-w_0}$ (2), $z \in D\setminus\{z_0\}$. F. h jest ograniczona, więc $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)h(z) = 0$ i zgodnie z Tw. 24 (1), ha ma w $z - 0$ osobliwość pozorną, $\lim_{z\to z_0} h(z) = a$. Jeśli $a \neq 0$, mamy z (2), $\lim_{z\to z_0} f(z) = \frac{1}{a} + w_0$, a więc f ma w z_0 osobliwość pozorną. Jeśli $a = 0$, $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$, a więc f ma w z_0 biegun.

- Tw. 32 Montela
Spr., że rodzina f. f_n, $n = 1, 2, \ldots$ jest jednakowo ciągła w każdym punkcie $z - 0 \in U$, tzn. $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall z \in U \forall n |z - z_0| < \delta$, to $|f_n(z) - f_n(z_0)| < \epsilon$ (1). W tym celu rozpatrzmy koło $D_r = \{z : |z - z_0| \leqslant r\} \subset U$, $r > 0$. Jeśli $|z - z_0| < \frac{r}{2}$, mamy $|f_n(z) - f_n(z_0)| = |\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f_n(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f_n(w)}{w-z_0}dw| = \frac{1}{2\pi}|\int_{\partial D_r}\frac{f_n(w)(z-z_0)}{(w-z)(w-z_0)}dw| \leqslant \frac{2\pi r M|z-z_0|}{2\pi(\frac{r}{2})^2} = \frac{4M}{r}|z - z_0|$. Tak więc, dla zadanego $\epsilon > 0$, $\delta = \min(\frac{r}{2}, \frac{\epsilon r}{4M})$ spełnia (1), dla $z \in U$ i $n = 1, 2, \ldots$. Niech $K_p = \{z \in U : |z| \leqslant p$ i $|z - w| \geqslant \frac{1}{p}$ dla $w \notin U$. Zbiory K_p są zwarte, $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset U$ i każdy zbiór zwarty leżący w U jest zawarty w pewnym zb. K_p. Twierdzenie Ascoliego-Arzeli, warunek (1) i wspólna ogarniczoność rodziny f_n, $n = 1, 2, \ldots$ zapewniają, że można kolejno wybrać ciągi f_{11}, f_{12}, $f_{13}, \ldots$ (wiersz 1), f_{21}, f_{22}, $f_{23}, \ldots$ (wiersz 2) …, tak że f_{11}, $f_{12}, \ldots$ jest podciągiem ciągu f_1, $f_2, \ldots, f_{p+1,1}$, $f_{p+1,2}, \ldots$ jest podciągiem ciągu $f_{p,1}$, $f_{p,2}, \ldots$ i każdy ciąg f_{p1}, $f_{p2}, \ldots$ zbiega jednostajnie na K_p. Wówczas ciąg przekątniowy f_{11}, $f_{22}, \ldots$ jest podciągiem ciągu f_1, $f_2, \ldots$ zbieżnym niemal jednostajnie na U.

- Tw. 33 Hurwitza
Zał. że f. f_0 nie jest stała na U i niech z_0, $z_1 \in U$, $z_0 \neq z_1$, $w_0 = f_0(z_0)$, $w_n = f_n(z_o)$, $n = 1, 2 \ldots$ (2). Ponieważ f_0 nie jest stała, z_1 nie jest punktem skupienia zbioru $f_0^{-1}(w_0)$, można zatem wybrać koło $D = \{: |z - z_1| \leqslant r\} \subset U$, $\partial D \cap f_0^{-1}(w_0) = \emptyset$ (3), $z_0 \notin \bar{D}$. Niech $d = \inf\{|w_0 - f_0(z)| : z \in \partial D\} > 0$ (4). Ustalmy $n \geqslant 1$ t. że (zob. 2) $||f_n - f_0||_{\bar{D}} < \frac{d}{3}$, $|w - 0 - w_n| < \frac{d}{3}$. Dla $z \in \partial D$ mamy wówczas (zob. (2), (3), (4)) $|(f_n(z) - w_n) - (f_0(z) - w_0)| \leqslant |f_n(z) - f_0(z)| + |w_n - w_0| < d \leqslant |f_0(z) - w_0|$, a więc z tw. Roucheé, $f_0 - w_0$ ma w kole D tyle samo zer (z uwzględnieniem krotności), co f. $f_n - w_n$. Ponieważ z zał., f_n jest f. różnowartościową i $z - 0 \notin \bar{D}$ (zob. (3)), zatem $f_n(z_0) = w_n \notin f_n(\bar{D})$, czyli $f_n - w_n$ nie zeruje się na $\bar{D}$. Tak więc $f_0 - w_0$ nie zeruje się na $\bar{D}$ i w szczególności, $f_0(z_1) \neq w_0 = f_0(z_0$, zob. (2).

- Wn. 5 Nierówność Cauchy'ego
Z Tw. 9 i Uw. 11: $|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}}dw \leqslant \frac{n!}{2\pi}2\pi r\frac{M}{r^{n+1}} = \frac{n!}{r^n}M$.

- Wn. 6 Tw. Liouville'a
Niech $|f(z)| \leqslant M$ dla $z \in \mathbb{C}$. Ustalmy dowolne $z_0 \in \mathbb{C}$. Z Wn.5 $\forall r > 0$, rozpatrując koło $\{z : |z - z_0| \leqslant r\}$ otrzymujemy nierówność $|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{r}$. Wobec dowolności r, $f'(z_0 = 0$. Tak więc pochodna f' zeruje się na $\mathbb{C}$ i f jest f. stałą.

- Wn. 7 Zasada maksimum modułu Zbiór $E = \{U \in U : |f(z)| = |f(w)|\}$ (1) jest relatywnie domknięty w U (tzn. $\bar{E} \cap U = E$). Pokażemy, że jest też otw. Niech $z_0 \in E$ i $D = \{z : |z - z_0| \leqslant R\} \subset U$. $\forall r \in (0, R]$ i koła $D_r\{z : |z - z_0| \leqslant r\}$, z Tw. 9 (1) i (1) mamy $2\pi|f(w)| = 2\pi|f(z_0)| = |\int_{\partial_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz| \leqslant \int_{\partial D_r} \frac{|f(z)|}{z-z_0|} dz = \frac{1}{r} \int_{\partial D_r} |f(z)| dz$. Ponieważ $2\pi|f(w)| = \frac{1}{r} \int_{\partial D_r} |f(w)| dz$ (f(w) jest stałą) oraz $|f(w)| \geqslant |f(z)|$, dla $z \in D_r$, wynika stąd, że całka f. nieujemnej $\int_{\partial D_r} (|f(w)| - |f(z)|) dz$ jest zerem, a więc f. pod całką zeruje się na ∂D_r. Pokazaliśmy, że $|f(z)| = |f(w)|$, jeśli $|z - z_0 \leqslant R$, a więc $D \subset U$ (zob. (1)). Ze spójności U wnosimy, że $E = U$, a więc moduł $|F|$ jest f. stałą na U. to oznacza, że f przekształca zb. otw. U w pewien okrąg, zatem pochodna rzeczywista $df(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nie może być izomorfizmem liniowym w żadnym punkcie $z \in U$, czyli $f'(z) = 0$ dla $z \in U$, a więc f. f jest stała.
- Inne: Tw. 30 Lemat Schwarza, Tw. 34 Riemanna