WSTĘP DO MATEMATYKI

1. Relacje równoważności, klasy abstrakcji. Jaki związek łączy relacje równoważności w zbiorze z podziałami tego zbioru? Przykłady konstrukcji ilorazowej (w algebrze, topologii/ innej dziedzinie).
Relacje równ. to relacje nierozróżnialnośći z jakiegośpunktu widzenia (zwrotną w A, symetryczna i przechodnią). Rodzina P podzb. Niepustego zb. A jest podziałem zb. A, jeśli jest złożona ze zb. niepustych, parami rozłącznych i jej sumą jest cały zb. A. Klasą abstrakcji elementu $a \in A$ względem relacji r nazywamy zb. składajacy się ze wszystkich elementów zb. A, które są w relacji r z a. Zb. wszystkich kl. Abstrakcji relacji r nazywamy zb. ilorazowym. Zasada abstrakcji – jeśli r jest relacją równ. na zb. A to zb. ilorazowy jest podziałem zb. A. Zb. wszystkich podziałów dowolnego niepustego zb. A jest równoliczny ze zb. wszystkich relacji równoważności w zb. A.
Niech G=Z oznacza addytywną gr. L. Całkowitych, a H=3Z jej podgrupę l. Podzielnych przez 3, która jest normlana z powodu przemienności G. Zbiór warstw G/H (grupa ilorazowa) to: {0+3Z,1+3Z,2+3Z}, działania: (a+3Z)o(b+3Z)=(a+b)+3Z.

2. Relacja (częściowego) porządku. Przykłady własności zbiorów liniowo uporządkowanych, których nie musi mieć każdy zbiór (częściowo) uporządkowany, i własności zbiorów dobrze uporządkowanych, których nie musi mieć każdy zbiór liniowo uporządkowany. Lemat Kuratowskiego-Zorna, przykłady zastosowań.
Relacja nazywamy dowolny zb., którego el-tami sa wyłącznie pary uporzadkowane (np. Każda funkcja). Intuicyjnie, czesciowy porz. W zb. X to relacja, ktora pozwala porownywac ze soba niektore jego elemtny. Relacja r w zb. X jest relacja cz. Porządku w zb.X jesli jest zwrotna, przechodnia, antysymetryczna (x r y i y r x=>x=y), np. Relacje nierówności.
Jeśli kazde dwa elementy zb. X są porównywane, to relacje cz. Porzadku r nazywamy relacja liniowego porzadku w zb. X. Liniowy porządek jest: gęsty (miedzy dowolnymi dwoma elementami zb. X zawsze znajdzie sie trzeci np.Q), ciągły (gęsty i ma kres górny/dolny o ile jest ograniczony z góry/dołu), dobry (jeśli istnieje el-t najmniejszy).
Lemat K-Z – Niech X będzie niepustym zb. częściowo uporzadkowanym przez relację r. Zał. że każdy łańcuch w zb. X ma ograniczenie górne w X. Wtedy w zb. X istnieje el-t max.
Łańcuchem w zb. X częsc. Uporząd. Przez relację r nazywamy dowolny podzb. $L \subseteq X$ liniowo uporz. Prez relację r|L, w szczególności podzb. Pusty.
Zastosowania: problem istnienia bazy w dowolnej p-ni liniowej m ożna sprowadzić do zagadnienia istnienia el-tów max. W zbiorach cz. Uporz.; w algebrze do dowodu tw. Dotyczącego ideałów.

3. Równoliczność zbiorów. Co to znaczy, że moc zbioru *A* jest mniejsza od mocy zbioru *B*? Przykłady zbiorów przeliczalnych i nieprzeliczalnych. Czy każdy zbiór nieprzeliczalny jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych? Czy istnieje zbiór o największej mocy?
Zb. A i B nazywamy równolicznymi, jeśli istnieje f. F przekształcająca wzajemnie jednoznacznie zb. A na zb. B. Np. N ~P (f(n)=2n, NxN~N (kratki w ćwiartce układu współ.), [0,1]~(0,1)~(0,1]~R.
Zb. A ma mniej el-tów niż zb. B, jeśli $|A| \leq |B|$ oraz zb. A i B nie są równoliczne.
Zb. przeliczalny A – równoliczny ze zb. l. naturalnych. Zb. A nazywamy zb. co najwyżej przeliczalnym, jeśli jest on skończony lub przeliczalny. Zb. A nazywamy zb. nieprzeliczalnym, jeśli, jeśli nie jest on zb. co najwyżej przeliczalnym (jest zb. nieskończonym i nie jest zb. przeliczalnym). Przeliczalne: Z, Q, nie – NQ.
Zb. równoliczne ze zb. l. rzeczywistych nazywamy zb. mocy continuum np. Zb. wszystkich podzb. Zb. l. naturalnych, zb. wszystkich nieskończonych ciągów binarnych /o wyrazach nat., RxR.

4. Obraz i przeciwobraz wyznaczony przez funkcję, własności. Rozdzielność funkcji obrazu (przeciwobrazu) względem działań na zbiorach. Uzasadnij, że obraz zbioru *A* wyznaczony przez funkcję jest równoliczny z pewnym zbiorem ilorazowym zbioru *A*.
Obrazem zb. A względem f. Nazywamy zb. f[A] wartości f. ($x \in A \cap D_f$). Przeciwobrazem zb. B wzgl. Funkcji f. Nazywamy zb. $f^{-1}[B]=\{x \in D_f : f(x) \in B\}$. Własności, zwiazki z podstawowymi działaniami na zb.: Dla dowolnej f. F oraz dowolnych zb. A,B: $A \subseteq B \Rightarrow f[A] \subseteq f[B]$, $f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B]$; $f[A \cup / \cap B]=f[A] \cup / \cap f[B]$; $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$ (z odwrotnościami – równości).
Niech f:X->f(X). W zb. X wporwpadzamy relację równoważności: $x \sim y \Leftrightarrow f(x)=f(y)$. Odwz. T: X/~->f(X) $T([x]_\sim)=f(x)$ jest bijekcją ustalającą równoliczność zb. X\~ i f(X).

TOPOLOGIA

1. Pojęcie przestrzeni topologicznej. Topologia przestrzeni. Czy każda topologia pochodzi od jakiejś metryki? (wyjaśnij użyte pojęcia, podaj przykłady)
Metryka pozwala mierzyć odległość między punktami p-ni, przyjmuje tylko wartości nieujemne. Metryki wyznaczają rodziny zb. otw. – topologie. Na zb. X – funkcja $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$, warunek symetrii, nierówność trójkąta. Parę (X,d) nazywa się p-nią metryczną, jej elementy – punktami. Np. Przestrzenie euklidesowe (R^n,d_e) – punkty to ciągi n-elementowe l. Rzeczywistych, odl. $d_e(a,b)=[\Sigma(a_i-b_i)^2]^{1/2}$. Zb. jest otw. jeśli zawiera kulę. Topologia p-ni metrycznej (topologia generowana przez metrykę d)-zb. otw. w (X,d).
Rodzina T podzb. Zb. X jest topologią w X, jeśli (/własności topologii p-ni metrycznej): $\{X, \emptyset\} \in T$, przecięcie skończenie wielu elementów T jest elementem T, suma dowolnie wiele el-tów T jest el-tem T. P-ń topologiczna – para (X,T), elementy X – punkty, elementy rodziny T – zb. otw. w (X,T).
Jesli dla p-ni topo. (X,T) można określić metrykę d na X, dla której T=T(d), to p-ń ta jest metryzowalna. Przykład niemetryzowalnej: antydyskretna $T=\{X, \emptyset\}$ o ile |X|>1 (dla dowolnego $x \in X$, $X \setminus \{x\} \notin T$.

2. Definicja ciągłości funkcji dla przestrzeni metrycznych i dla przestrzeni topologicznych. Równoważność tych definicji w przypadku przestrzeni metrycznych (z uzasadnieniem)
Klasyczna def. Ciągłości f:R->R Przenosi się na przypadek przekształceń między p-niami metrycznymi (X,d_X), (Y,d_Y). $\forall a \in X \forall e>0 \exists \delta>0 \forall x \in X\ d_x(a,x)<\delta \Rightarrow d_y(f(a),f(x))<e$.
Przekształcenie f:X->Y p-ni topo. (X,T_X), (Y,T_Y) jest ciągłe, jeśli $\forall U \in T_Y$, $f^{-1}(U) \in T_X$.
Ciągłość przekształcenie f p-ni metrycznej jw. jest równoważna warunkowi, że jeśli $x_n \to x_0$ to $f(x_n) \to f(x_0)$.

3. Przestrzenie zwarte: definicja, przykłady. Metryczny warunek zwartości. Zwarte podzbiory przestrzeni R^n, funkcje ciągłe określone na przestrzeni zwartej.
P-ń metryzowalna jest zwarta, jeśli spełnia war. (n.w.s.r): z każdego otw. pokrycia p-ni X można wybraż pokrycie skończone, z każdego ciagu punktów w X można wybrać podciąg zbieżny w X, każdy zstępujący ciąg niepustych zb. domkniętych w X ma niepuste przecięcie. np. Domknięty odcinek na prostej euklidesowej.
P-ń topo. (X,T) jest zwarta, jeśli jest p-nią Hausdorffa ($\forall$ pary punktów istnieją zb.rozłączne, do których one należą) i z każdego otw. pokrycia tej p-ni można wybrać pokrycie skończone np. Kwadrat leksykograficzny (zwarty, niemetryzowalny). Zb. zwarty w p-ni Hausdorffa jest domk. (*)
Podzb. p-ni euklides. jest zwarty wtw. gdy jest domk. i ogr. (leży w pewnej kuli w tej p-ni):
=>Domkniętość A z (*), rodzina kul B(0,1),B(0,2),... pokrywa A i wybierając z tego pokrycia pokrycie skończone mamy $A \subset B(0,n)$ dla pewnego n. <= każdy zb. ogr. w p-ni euklid. Leży w pewnej kostce, która jest zwarta, więc domk.A=A i A jest zwarty.
P-rzekształcenie ciągłe f p-ni Hausdorffa w p-ń Hausdorffa przeprowadza zb. zwarte w X na zb. zwarte w Y. Tw. Weierstrassa:Niech f będzie f. Ciągłą na p-ni Hausdorfaa. $\forall$zb. zwartego $K \subset X$ $\exists$punkty $a,b \in K$ t. Że f(a)=supf(K), f(b)=inff(K). Ciągłe i różnowartościowe przekształcenie p-ni zwartej na p-ń Hausdorffa jest homeomorfizmem (**).
Zb. w p-ni metrycznej jest całkowicie ograniczony (CO), jeśli $\forall e>0$ można go pokryć skończenie wieloma zb. o średnicach<=e. P-ń metryczna jest zwarta wtw. Gdy jest zupełna i CO.

4. Przestrzenie metryczne zupełne: definicje, przykłady. Czy przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna, czy przestrzeń zupełna i ograniczona jest zwarta (dlaczego tak/nie)? Twierdzenie Baire'a. Dlaczego nie można opuścić żadnego z założeń tego twierdzenia?
Zb. A w p-ni topo. (X,T) jest brzegowy, jeśli ma puste wnętrze. Zupełność – własnośc metryki, nie topologii. P-ń metryczna jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchyego w tej p-ni jest zbieżny.
P-nie euklidesowe (R^n,d_e),, P-ń Hilberta są zupełne (l_2,d_h), punkty – ciągi $a=(a_1,a_2,...)$ sumowalne z kwadratem odl. $d_h(a,b)=[\Sigma(a_i-b_i)^2]^{1/2}$.
Tw. Baire'a -w p-ni metrycznej zup., przeliczalna suma domkniętych zb. brzegowych jest zb. brzegowym: - zał., że zbiory są brzegowe nie wystarczy - prosta euklidesowa jest sumą dwóch zb. brzegowych (Q i NQ). - nie mozna pominąć zał. o zupełności. Rozpatrzmy p-ń l. Wymiernych (Q,d_e) z metryką euklid. $d_e(x,y)=|x-y|$ i ustawmy l. Wymierne w ciąg. Zb. $A_i=\{q_i\}$ są domknięte i brzegowe w (Q,d_e), ale ich suma $UA_i=Q$ nie jest brzegowa w p-ni Q.
Każda metryke generująca topologię p-ni zwartej jest zupełna.
Tw. (warunek Cantroa) –p'n jest zupełna wtw. Gdy spełnia war.: każdy zstępujący ciąg niepustych zb. domk. o średnicach dążących do zera ma niepuste przecięcie.
Wpp. Nie działa np. Zb. A w p-ni Hilberta, $a_n=(0,...,0,1/2,0,...)$, A leży w kuli o środku w zerze i prom. 1. A jest domk., ale nie jest zwarty, bo z (a_n) nie można wybrać podciągu zbieżnego $(dn(a_n,a_m)=1)$.

5. Spójność i łukowa spójność przestrzeni topologicznych. Czy któraś z tych własności implikuje drugą? (przykład na brak wynikania w którąś stronę, wyjaśnij użyte pojęcia, podaj przykłady).
P-ń topo. (X,T) jest spójna, jeśli zb. X nie można rozłożyć na sumę dwóch rozłącznych, niepustych zb. domkniętych (równ. otw.) Zb. S w p-ni (X,T) jest spójny wtw. Gdy ∀niepustych zb. A,B t. Że $S=A\cup B$, mamy domk.$A\cap B\neq\emptyset$ lub $A\cap$domk.$B\neq\emptyset$. Podzb. S prostej euklid. jest spójny wtw. Gdy jest przedziałem. PC przeprowadzają zb. spójne na zb. spójne.
Zbiór $T=\{(t,\sin(1/t)):t\in(0,1]\}\cup\{0\}x[-1,1]$ na płaszczyźnie eukl. jest spójny, ale nie jest ł. spójny.
P-ń topo. (X,T) jest łukowo spójna, jeśli każdą parę punktów z X można połączyć drogą w X (łącząca a,b - przekształcenie ciągłe f:[0,1]->X, t. że f(0)=a,f(1)=b). P-ń łukowo spójna jest spójna: ustalmy $a\in X$ i $\forall x\in X$ wybierzmy drogę f_x:[0,1]->X łączącą a i x. Zb. $S_x=f_x([0,1])$ jest spójny, a więc $\cup x\in X$ $S_x=X$ jest zb. spójnym. Spójny, otw. zb. w p-ni euklid. jest łukowo spójny.

6. Homeomorficzność przestrzeni topologicznych, przykłady. Czy z istnienia ciągłej bijekcji *f: X -> Y* wynika istnienie homeomorfizmu? Czy takie wynikanie ma miejsce przy jakichś szczególnych założeniach o przestrzeniach?
Homeomorfizm - przekształcenie f:X->Y p-ni top. (X,T_X) w (Y,T_Y), jeśli f jest różnowartościowe, f(X)=Y, f i f^{-1} są ciągłe. Złożenie homeo. jest homeo. Każde dwa otw. zb. wypukłe w p-ni eklid. Są homeo. Otw. zb. wypukły w R^n jest homeo. z R^n.Przekształcenie f(t)=(cost,sint) odcinka [0,2pi) na prostej uklid. Na okrąg jednostkowy S^1 jest ciągła bijekcją, ale nie jest homeo. Istotnie, dla a_n=(cos(2pi-1/n),sin(2pi-1/n)), a_n->f(0), ale $f^{-1}(a_n)$ nie zbiega do 0. (**)

ALGEBRA

1. Pojęcia grupy, podgrupy, homomorfizmu i izomorfizmu grup. Przykłady grup (grupy permutacji, grupy izometrii, grupy macierzy), twierdzenie Cayley'a.
Grupa – zb. G z trzema działaniami: 2-argumentowe (mnożenie), 1-argumentowe (branie el-tu odwrotnego), 0-argumentowe – el- wyróżniony 1, t. że spełnione są aksjomat: łączność mnożenia. Moc zb. G nazywamy rzędem gr. G. Np. grupy przekształceń (składanie przekształceń – operacja grupowa, przekszt. Ident. – jedynka, przekszt. Odwr. – el-t odwrotny; np. zb. izometrii/obrotów płaszczyzny), gr. Cykliczna Z (dodawanie), gr. macierzy odwracalnych nxn o współcz. z ciała K (GL(n,k)), gr. Cykliczna pierwiastków st. n z jedynki, z mnożeniem jako działaniem 2-arg.
Podgrupa gr. G – podzb. $H\subseteq G$ t. że iloczyn dwóch el-tów z H należy do H, el-t odwrotny też, $1\in H$, np. trywialna (tylko el-t neutralny).
Homomorfizm grup – przekszt. F:G->H wtw. Gdy $\forall g_1,g_2\in G$ $F(g_1g_2)=F(g_1)F(g_2)$ (el-t neutralny na neutralny). Np. - G - zb. l. nat. z działaniem +, a H zb. l. rzeczywistych z działaniem mnożenia; homo. – f. wykładnicza h(x) = exp(x), - F: Z->Z_n, F(k)=exp(2πik\n).
Izomorfizm – taki homo. F:G->H, dla którego istnieje homo. P:H->G t. że FP=id_H i PF=id_G.
Homo. Gr./pierścieni Jest izo. Wtw. Gdy jest homo. I bijekcją zbiorów.
Automorfizm – izo. z gr. G w tę samą gr. G. Mono. –homo różnowartościowy; epi. – homo. na; Endo. – homo., którego dziedzina i przeciwdziedzina są identyczne.
Tw. Cayleya – każda grupa G jest izo.z pewną podgr. gr. permutacji zb. G. W szczególności, każda gr. G rzędu n jest izo. z pewną podgr. gr. S_n.

2. Pierścienie: definicja i przykłady. Homomorfizmy pierścieni, ideały pierwsze i maksymalne.
Pierścień – zb. R z 4 działaniami – dwa 2-argumentowe (dodawanie i mnożenie), jedno 1-argumentowe (branie el-tu przeciwnego), jedno 0-argumentowe (el-t wyróżniony 0)., t. że (R,+,0) jest gr. przemienną i spełnione war.: łączność mnożenia, rozdzielność mnożenia wzgl. + (2 war.).
Pierścieniem z jedynką nazywamy pierścień wyposażony w jeszcze jedno działanie 0-arg. – element wyróżniony (neutralny) – 1. Tylko w pierścieniu zerowym 0=1.
Np. pierścien Z_n l. całkowit. modulo n z + i mnożeniem modulo n (jedynka – 1, zero – 0); pierścien wielomianów nad R (R[X]); ciało jest pierścieniem przeminnym z jedynką; pierścień szeregów formalnych.
Homo. - przekształcenie F:R->P pierścieni przemiennych z jedynką, spełnione są warunki: F jest homo. grup addytywnych; $\forall a,b\in R$ F(ab)=F(a)F(b); F(1)=1.
Np. f: Z->Z - identyczność; f:Z->Z_n – f(x)=x(modn).
Ideał pierścienia R – podrupa I gr. addytywnej tego pierścienia, która spełnia warunki $\forall x\in R$ $a\in I$ $ax\in I$. Np. - jądro dowolnego homorfizmu (zb. arg. Które przechodzą na 0 przy homo.), - cały pierścień, ideał zerowy {0}.Ideał I pierścienia R nazywamy ideałem:
- pierwszym wtw. Gdy R/I jest dziedziną całkowitości; wtw. Gdy $I\neq R$ oraz dla dowolnych $x,y\in R$, jeżeli $xy\in I$, to $x\in I$ lub $y\in I$.
- maksymalnym wtw. Gdy R/I jest ciałem; wtw. Gdy jest el-tem max. ze względu na zawieranie, w zb. właściwych ideałów R.
Każdy ideał max. Jest pierwszy. Każdy ideał właściwy I (różny od całego pierścienia) jest zawarty w pewnym ideale max. Pierścień jest ciałem wtw. Gdy jest niezerowy i jedynymi jego ideałami są ideał zerowy i cały pierścień.

3. Konstrukcje ilorazowe na przykładzie grup i pierścieni. Twierdzenia o izomorfizmie.
Grupy - Konstrukcja ilorazowa – patrz wdm.
Tw. O homo.: Jeżeli G,H są grupami, a f:G->H jest homo. to jądro K homo. f jest podgr. normalną G, obraz f jest podgr. H, a grupa ilorazowa G/K jest izo. z obrazem f (jeśli f jest na, to G/K jest izo. z H).
Podgrupę H gr. G nazywamy normalną (dzielnikiem normalnym) wtw. gdy $\forall g\in G$ $gHg^{-1}=\{ghg^{-1}:h\in H\}=H$ (warstwy lewo- i prawostronne są sobie równe, np. każda podgrupa gr. przemiennej jest normalna.
Grupą ilorazową gr. G przez podgr. normalną H nazywamy zb. warstw G/H, z warstwą 1H jako el-tem wyróżnionym i z działaniami xHyH=xyH, $(xH)^{-1}=x^{-1}H$).
Pierścienie
Konstrukcja ilorazowa – Mamy pierścień Z i ideał złożony z liczb parzystych (2Z). Wówczas pierścień ilorazowy Z/2Z ma tylko dwa elementy - jeden to liczby parzyste, drugi - nieparzyste. Jest on izomorfpiczny ze skończonym ciałem dwuelementowym.
Tw. O homo.: Jeżeli R,S są pierścieniami, a f:R->S jest homo. to jądro K homo. f jest ideałem względem pierścienia R, obraz f jest podpierścieniem. S, a pierścień ilorazowy G/K jest izo. z obrazem f (jw.).
Niech I bedzie ideałem wzgl. Pierśceinia R. Pierścieniem ilorazowym nazywamy zb. wartstw R/I z działaniami (x+I)+(y+I)=(x+y)+I, (x+I)(y+I)=xy+I, -(x+I)=-x+I i warstwami 1+I jako jedynką, I – zero. Przekzstałcenie P:R->R/I zadane wzorem P(x)=x+I jest epi., ker P=I.

4. Związki pomiędzy rzędem grupy i rzędami podgrup, tw. Lagrange'a, Cauchy'ego i Sylowa.
$\forall g\in G$ zb.<g>=$\{g^k\in G:k\in Z\}$ jest podgr. Gr. G, nazywana podgr. Generowaną przez el-t g.
Rzędem el-tu $g\in G$ (o(g)) nazywamy l. |<g>|, czyli rząd podgr. generowanej prez el-t g.
Rząd podgrupy (też el-tu) jest dzielnikiem rzędu gr. Np. jeżeli p jest l. pierwszą to gr. Z_p nie posiada nietrywialnych podgrup właściwych, każdy el-t różny od neutralnego jest rzędu p.
Niech G będzie dowolną gr. a H jej podgr. Dla dowolnego gG rozpatrzmy podzb. $gH=\{gh:h\in H\}\subseteq G$:
- zb. gH jest kl. Abstrakcji wyznaczającą w zb. el-tów G relację równoważności $x\sim y \Leftrightarrow x^{-1}y\in H$. Zb. gH nazywamy warstwą lewostronną el-tu g wzgl. Podgr. H.
- dowolne dwie warstwy lewostronne są rownoliczne, w szczególności każda warstwa jest równoliczna ze zb. H. Zb. warstw lewostronnych ozn. G/H, jego moc nazywamy indeksem podgrupy H w gr. G (ozn. [G:H]). Analogicznie – warstwy prawostronne gr. G wzgl. Podgr. H to podzb. Postaci $Hg=\{hg:h\in H\}\subseteq G$
Tw. Lagrange’a – Jeżeli G jest gr. skończoną i H jest podgr. G to |G|=|H|[G:H].
Tw. Cauchy’ego – Jeżeli G jest gr. skończoną i l. piersza p jest dzielnikiem rzędu gr. G, to w G istnieje el-t rz. p.
Tw. Sylowa – (odwrócenie tw. Lagrange’a dla pewnych dzielników rzędu gr.) jeżeli G jes gr. rzędu n i $n=p_1^{k1}...p_s^{ks}$ jest przedstawieniem n w postaci iloczynu potęg różnych l. pierwszych, to tw. Sylowa mówi, że $\forall p_i$ istnieje w G podgr. rzędu p_i^k i podaje ograniczenia na l. takich podgr.

5. Iloczyn prosty grup, klasyfikacja skończonych grup abelowych.
Niech $(G_t)_{t\in T}$ będzie niepustą rodziną gr. produkt kartezjański $P_{t\in T}$ G_t jest gr. wzgl. Działania określonego wzorem $(g_t)_{t\in T}(g_t)_{t\in T}=(g_tg_t)_{t\in T}$. Gr. tę nazywamy produktem/iloczynem prostym gr. rodziny $(G_t)_{t\in T}$. Jeśli T={1,...,n} to zamiast $P_{k\in\{1,...,n\}}G_k$ piszemy $\prod G_k$ lub G_1x...xG_n.
Tw.(O klasyfikacji gr. przemiennych skończenie generowanych)
Każda skończenie generowana gr. abelowa G jest izo. z iloczynem prostym cyklicznych grup o rzędach będącymi potęgami l. pierwszych oraz nieskończonych gr. cyklicznych; tzn. każda taka gr. jest izo. z gr. postaci Z^nxZ_{q1}x...xZ_{qt}, gdzie $q_1,...,q_t$ są (niekoniecznie różnymi) potęgami l. pierwszych. Wartości n, $q_1,...,q_t$, są wyznaczone jednoznacznie (co do porządku) przez G.
Tw. Każda skończona gr. abelowa jest izo. z produktem skończonej l. gr. cyklicznych (tzn. ∃g t. że <g>=G).

6. Dzielniki zera, el-ty odwracalne w pierścieniach. Konstrukcja ciała ułamków dz. całkowitości.

Dzielnik zera – el-t $x\in R$ wtw. Gdy istnieje el-t niezerowy $y\in R$, dla którego $xy=0$. W pierścieniu zerowym, 0 jest dzielnikiem zera. Można skracać przez el-ty, które nie są dzielnikami zera.
Element odwracalny-el-t $x\in R$ wtw. gdy ist. el-t $y\in R$ zwany odwrotnością el-tu x, dla którego $xy=1$.
W pierścieniu skończonym, el-t nie będący dzielnikiem zera jest odwracalny.
Dziedzina całkowitości - niezerowy pierścień przemienny z jedynką, który nie ma niezerowych dzielników zera (skończona, jest ciałem).
Konstrukcja ciała ułamków Q(R) dziedziny R (gdy R=Z, otrzymujemy ciało l. wymiernych Q(Z)=Q): Niech R będzie dziedzina całkowtiości. Na zb. par uporządkowanych $Rx(R\setminus\{0\})$ określamy relację relację równoważności ~ wzorem $(x,y)\sim(z,v)\Leftrightarrow xv=yz$. Klasę równoważności tej relacji nazywamy ułamkiem i oznaczamy symbolem x/y ($x/y=z/v\Leftrightarrow xv=yz$). Zb. wszystkich ułamków oznaczamy symbolem Q(R). Ciałem ułamków dziedziny całkowitości R nazywamy zb. Q(R) z ułamkiem 0/1 jako zerem, ułamkiem 1/1 jako jedynką i działanaami określonymi wzorami: $x/y+p/q=(xq+py)/yq$, $x/y\ p/q=xp/yq$, $-(p/q)=(-p)/q$.

ANALIZA MATEMATYCZNA

1. Ciągi liczb rzeczywistych. Zbieżność ciągu, warunek Cauchy'ego, zupełność zbioru liczb rzeczywistych.

Ciąg liczbowy l. rzecz. $x_1,\ldots,x_n,\ldots,x_{n'},\ldots$, którego wyrazy x_n są ponumerowane wszystkimi l. nat. I położone w porządku wzrostu wskaźników: postępy arytmetyczne. Geometryczne.
Granica ciągu $\{x_n\}$– stała liczba a; jeżeli ∀dowolnie małego e, istnieje taka liczba N, że wszystkie wartości x_n o wskaźniku n>N spełniają nierówność $|x_n-a|<e$. Zapisujemy lim $x_n=a$ (przy x_n->a). Ciągi mające granicę nazywa się zbieżnymi. Np. $x_n=(1+1/n)^n$->e (przy n->oo).
Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ ma granicę +oo(-), jeżeli dla dowolnie dużej z góry danej liczby E>0, począwszy od pewnego miejsca wyrazy x_n są większe od E (mniejsze od –E).
Tw. o trzech ciągach; jeśli dwa ciągi mają skończoną granicę to ich suma, różnica, iloczyn, iloraz także. Ciągi monotoniczne – (nie)rosnące, (nie)malejące.
Tw. Stolza – lim x_n/y_n=lim $(x_n-x_{n-1})/(y_n-y_{n-1})$ (Zał.: y_n->+oo, choćby poczynając od pewnego miejsca y_n rośnie wraz z n tj. $y_{n+1}>y_n$). Wyr. Nieoznaczone: 0/0, oo/oo, 0oo, oo-oo, 1^{oo},0^0,oo^0.
War. Cauchy'ego – na to, by ciąg $\{x_n\}$ miał granicę skończoną, potrzeba i wystarcza, żeby ∀e>0 ∃N, że nierówność $|x_n-x_{n'}|<e$ jest spełniona, jeśli tylko n,n'>N.
Lemat Bolzano – Weierstrassa – Z dowolnego ciągu ograniczonego zawsze można wybrać podciąg zbieżny. Granica dolna i górna dla ciągu $\{x_n\}$ zawsze istnieją. Ich równość jest war. koniecznym i dostat. na istnienie granicy ciągu.
Rozważmy przekrojew w zb. wszystkich liczb rzeczywistych (podział zb. licz. rzecz. na dwa niepuste zb. A, A'' przy którym: każda . rzecz. Należy do jednego i tylko jednego ze zb. A, A'; każda l. a ze zb. A jest mniejsza od każdej liczby a' ze zb. A'). Tw. Dedekinda (podstawowe) - zawsze dla takiego przekroju A|A' istnieje wśród l. rzecz. L. graniczna określająca przekrój. W zb. tym nie istnieją luki (w przeciwieństwie np. do Q). Tę własność zb. l. rzecz. Nazywamy zupełnością zb. (a także ciągłością/spójnością).

2. Szeregi liczbowe, zbieżność bezwzg. i war. Przykłady kryteriów zbieżności i ich zastosowań.

Niech będzie dany pewien nieszkończony ciąg liczb $a_1,\ldots,a_n,\ldots$ Utworzony z tych liczb symbol $a_1+\ldots+a_n+\ldots$ nazywa się szeregiem nieskończonym, a same liczby wyrazami szeregu (oz. $\sum a_n$). Dodając kolejno wyrazy szregu tworzymy nieskończenie wiele sum $A_1=a_1$, $A_2=a_1+a_2,\ldots,A_n=a_1+\ldots+a_n$. Sumy te nazywają się sumami częściowymi.
Suma szregu – skończona lub nie granica A ciągu sum częściowych An szeregu $a_1+\ldots+a_n+\ldots$, gdy n->oo, A=limA_n (ozn. $A=a_1+\ldots+a_n+\ldots=\sum a_n$). Jeśli szereg ma sumę skończoną to nazywamy go zbieżnym wpp. (gdy jest ona równa oo lub sumy nie ma wcale) nazywamy go szeregiem rozbieżnym. Zbieżność szeregu $\sum a_n$ jest równoważna z istnieniem granicy ciągu sum częściowych,
Np. szereg geometryczny. Własności: odrzucenie skończonej l. początkowych wyrazów szeregu (lub dołączenie na początku) nie wpływa na zbieżność szeregu; dwa szeregi zbieżne można dodawać (odejmować) wyraz za wyrazem. Warunek konieczny zbieżności szeregu - wyraz ogólny a_n szeregu zbieżnego dąży do zera (nie dostateczny np. 1/n).
War. Cauchy'ego zbieżności szeregów - szereg $\sum a_n$ jest zbieżny wtw., gdy ∀e>0 ∃N∈N ∀m>n≥N: $|a_{n+1}+\ldots+a_m|<e$.
Szeregi o wyrazach dodatnich:
- Tw. o prównywaniu szeregów (jeżeli od pewnego miejsca $a_n\le b_n$, to ze zbieżności $\sum b_n$ wynika zbieżność $\sum a_n$ albo z rozbieżności $\sum a_n$ wynika rozbieżność $\sum b_n$;
- Jeśli istnieje granica lim an/bn=K (0≤K≤+oo), to gdy K<+oo, ze zbieżności $\sum b_n$ wynika zbieżność $\sum a_n$, a gdy K>0 , z rozbieżności szeregu $\sum a_n$ wynika rozbieżność $\sum b_n$.
- Kryt. Cauchy'ego – zał. że ciąg $\{c_n\}$, gdzie $c_n=(a_n)^{1\backslash n}$, ma granicę skończoną lub nieskończoną, limc_n=c. Wówczas jeśli c<1, t oszreg jest zbieżny, a jeśli c>1 to szereg jest rozbieżny (gdy c=1 – kryt. Nie rozstrzyga zachowania szeregu), np. $\sum 1/(\ln n)^n$, $c_n=1/\ln n$->0 zbieżny.
- Kryt d'Alemberta – Zał. że ciąg $\{d_n\}$, gdzie $dn=a_{n+1}/a_n$ ma granicę (skończoną lub nie), limd_n=d. Wówczas jeśli d<1, to szereg jest zbieżny, jeśli zaś d>1, to szereg jest rozbieżny, np.
$\sum 1/n!$, $d_n=1/(n+1)$->d=0->zbieżny.
- Kryt Raabego – silnejsze od d'Alemberta, $r_n=n(a_n/a_{n+1}-1)$, r=limr_n; gdy r>1 zbieżny, r<1 – rozbieżny.
- ogólne kryt. Kummera – Zał. że ciąg $x_n=c_na_n/a_{n+1}-c_{n+1}$ (gdzie $\sum 1/c_n$ jest szeregiem rozbieżnym o wyrazach dodatnich) ma granicę (skończoną lub nie) limx_n=x. Wówczas gdy x>0, szereg jest zbieżny, a gdy x<0 to rozbieżny.
- Kryt. Bertranda – limb_n=b, $b_n=\ln n(r_n-1)$, b>1 zbieżny, b<1 rozbieżny;
- Kryt. całkowe Cauchy'ego-Maclaurina – szereg $\sum a_n=\sum f(n)$ (gdzie f(n) jest wartością w punkcie x=n pewnej f. f(x), określonej dla $x\ge n_0$ (np. 1); zał. że f jest ciągła, dodatnia i monotonicznie malejąca) jest zbieżny lub rozbieżny w zależności od tego czy f. $F(x)=\int f(x)dx$ ma dla n->oo granicę skończoną czy nie, np. $\sum 1/(n\ln^2 n)$, $\int 1/x\ln^2 x dx=-1/\ln x$->0 (przy x->+oo) – zbieżny.
- Kryt. o zagęszczaniu – (Cauchy'ego) Zał., że szereg $\sum a_n$ jest taki, że ciąg |an| jest monotonicznie malejący, a p jest liczbą naturalną większą od 1. Jeżeli zbieżny jest szereg $\sum p^n\cdot|a_{p^n}|$, to zbieżny jest szereg $\sum a_n$;
- Kryt. Dirichleta - Jeśli $\sum a_n$ jest szeregiem, którego ciąg sum częściowych jest ograniczony, $\{l_n\}\subseteq R$ jest ciągiem malejącym oraz zbieżnym do zera, to szereg $\sum l_na_n$ jest zbieżny.
Szeregi o wyrazach dowolnych:
Suma dowolnej l. wyrazów szeregu następujacych po dostatecznie dalekim wyrazie powinna być dowolnie mała.
Niech będzie dany szereg $\sum a_n$ o wyrazach dowolnych znaków. Jezeli jest zbieżny szereg $\sum|a_n|$ utworzony z wartości bezwzględnych jego wyrazów, to dany szereg $\sum a_n$ jest także zbieżny. Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny wraz z szeregiem $\sum|a_n|$ to mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny (wystarcza zbieżność $\sum|a_n|$).
Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum|a_n|$ nie jest zbieżny, to szereg $\sum a_n$ nazywa się warunkowo zbieżnym.
Kryteria Cauchy'ego i d'Alemberta stwierdzające rozbieżność $\sum|a_n|$, stwierdzają rozbieżność $\sum a_n$ (wówczas wyraz ogólny $|a_n|$ nie dąży do zera).
Tw. Leibniza - szereg naprzemienny jest zbieżny.
Szereg naprzemienny - gdy dwa kolejne wyrazy szeregu są przeciwnego znaku i ciąg modułów jego wyrazów monotonicznie zbiega do zera (od pewnego miejsca) - $\sum(-1)^n(a_n)$.

3. Ciągłość i jednostajna ciągłość funkcji i odwzorowań. Twierdzenie o osiąganiu kresów przez funkcję ciągła na przedziale domkniętym. Przykład funkcji ciągłej niejednostajnie ciągłej.

Def. Cauchy'ego granicy w punkcie:
Niech A – podzb. R, f:A->R; mówimy, że f. f(x) ma granicę g, gdy x dąży do x_0, gdy ∀e>0 ∃δ>0 $\forall x\in A\setminus\{x_0\}$ $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-g|<e$; ozn. $\lim_{x\to x_0}f(x)=g$ (gdzie $x_0\in R$ jest punktem skupienia zb. A). Dla istnienia granicy potrzeba i wystarcza, żeby istniała granica lewo- i prawostronna (górna i dolna) i żeby był one sobie równe.
f(x)->+oo(-), gdy x dąży do x_0, jeżeli ∀E>0 ∃δ>0 t. że $|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)>E$ (f(x)<-E).
Ciągłość f. charakteryzuje się tym, że nieskończenie małemu przyrostowi argumentu odpowiada nieskończenie mały przyrost wartości. Ciągowa def. Heinego.
Jednostajnie ciągła f. f(x) w przedziale X - jeżeli dla dowolnej liczby e>0 ∃δ>0 t. że $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<e$ dla dowolnych punktów x_0 i x z przedziału X.
Tw. Cantora – jeżeli f. f(x) jest określona i ciągła w przedziale domk. [a,b] to jest ona również jednostajnie ciągła w tym przedziale.
Tw. Weierstrass – Jeżeli f. f(x) jest określona i ciągła w przedziale domk. [a,b], to osiąga ona w tym przedziale swój kres górny i dolny.
Funkcja 1/x na przedziale (0,1) jest ciągła, ale nie jest jednostajnie ciągła.
Tw. Darboux - jeśli a<b, f:[a,b]->R jest f. ciągłą, f(a)f(b)<0, to ∃c∈(a,b): f(c)=0.
Przypadek wielowymiarowy:

Liczba A jest granicą f. f(x1,...,xn), gdy zmienne $x_1,...,x_n$ dążą odpowiednio do $a_1,..,a_n$: $\forall e>0\ \exists\delta>0\ \forall y\ |x-x_1|<\delta,...,|x_n-a_n|<\delta => |f(x_1,...,x_n)-A|<e$.
Mówimy, że f. $f(x_1,...,x_n)$ jest ciągła w punkcie $M'=(x'_1,...,x'_n)$, jeśli $\forall e>0\ \exists\delta>0\ \forall y\ |x-x'_1|<\delta,...,|x_n-x'_n|<\delta => |f(x_1,...,x_n)-f(x_1',...,x_n')|<e$.

4. Pochodna funkcji: zmiennej rzeczywistej, odwzorowania. Pochodne cząstkowe. Obliczanie pochodnych.

Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$, jeśli istnieje granica ilorazu różnicowego $\lim_{h->0}[f(x_0+h)-f(x_0)]\backslash h$. Granicę tę - jeśli istnieje - nazywamy pochodną f. f w punkcie x_0 i ozn. symbolem $f'(x_0)$ lub $df\backslash dx(x_0)$. F. x->f'(x), która argumentowi x przyporządkowuje wartość pochodnej f'(x) f. f w punkcie x nazywamy f. pochodną f. f lub - krótko - pochodną f. f. Dziedzina pochodnej x->f'(x) jest zawsze podzb. dziedziny f. x->f(x). Jeśli f. jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in(a,b)$, to jest w tym punkcie ciągła.
Niech X oznacza p-ń normowaną rzeczywistą (tzn. nad ciałem R) z normą ||.||. Rozważmy odzwzorowanie f:G->X, gdzie G∈R. Jeśli istnieje granica $f'(t_0)=\lim_{t->t0} 1/(t-t_0)[f(t)-f(t_0)]\in X$, gdzie $t_0\in G$, to nazywamy ją pochodną odwz. F w punkcie t_0 i odzwz. F nazywamy różniczkowalnym w punkcie t_0.
Niech f:t∈(a,b)->f(t) ∈Y będzie f. określoną na przedziale otw. o wartościach w p-ni unormowanej Y, np. $Y=R^n$, $y=(y_1,...,y_n)$. Mówimy, że f. f:(a,b)->Y jest różniczkowalna w punkcie $t_0\in(a,b)$, jeśli istnieje wektor yo∈Y t. że iloraz różnicowy $1/h(f(t_0+h)-f(t_0))$ zmierza do y_0 w normie p-ni Y (przy h->0). Wektor y_0 nazywamy pochodną f. f w punkcie t_0 i ozn. $d/dtf(t_0)$ $(f'(t_0))$.
Funkcja f:(a,b)->Y o wartościach w p-ni unormowanej Y ma pochodną w punkcie $x_0\in(a,b)$ wtw., gdy istnieje wektor $y_0\in Y$ t. że $\lim_{h->0}||f(x_0+h)-f(x_0)-hy_0||_Y\backslash|h|=0$.
Niech U będzie otw. podzb. p-ni euklid. R^n i dane będą punkt $x=(x_1,...,x_n)$ oraz f. f:U->R. Jeżeli istnieje skończona granica $\lim_{h->0}[f(x_1,...,x_k+h,...,x_n)-f(x_1,...,x_k,...,x_n)]\backslash h$ to nazywa się ją pochodną cząstkową f. f w punkcie x wzgl. zm. x_k.
Wzór Leibniza – obliczanie pochodnych wyższych rzędów $(fg)^n=\sum(^n{}_k)f^{(n-k)}g^{(k)}$.

• Twierdzenia o wartości średniej rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej (twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a). Przykład zastosowania.
Tw. Rolle'a - Niech f:[a,b]->R będzie f. ciągłą w przedziale domk. [a,b] i różniczkowalną wew. tego przedziału. Jeśli na końcach przedziału f. f przyjmuje równe wartości f(a)=f(b), to istnieje punkt l∈(a,b), w którym zeruje się pochodna funkcji f'(l)=0. Np. w dowodzie tw. Lagrange'a; do szaczowania liczby miejsc zerowych pochodnej funkcji,
Tw. Lagrange'a - jeśli funkcja f:[a,b]->R jest ciągła w przedziale domk. i różniczkowalna w każdym punkcie przedziału otw. (a,b), to istnieje punkt l∈(a,b) t. że [f(b)-f(a)]\(b-a)=f'(l) (dowód – f. pomocnicza F spełniająca zał. tw. Rolle'a i spr. kiedy F'(x)=0). Np. do uzasadnienia nierówności $e^x>1+x$ dla x>0. Niech $f(x)=e^x$, [a,b]=[0,x], gdzie x>0. Łatwo spr. Że f spełnia zał. tw. Lagrange'a na [a,b]. Wtedy $(e^x-e^0)/(x-0)= [e_x]'_{x=c}$, gdzie 0<c<x, stąd $e^x-1=xe^c$, gdzie 0<c<x. Zatem $e^x-1>xe^0=x$, czyli $e^x>1+x$;
- Tw. Cauchy'ego .

• Szeregi potęgowe; przedział zbieżności, różniczkowanie i całkowanie szeregu potęgowego, przykłady.
Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $x_0\in R$ i współrz. $c_n\in R$ (n∈N) nazywamy szereg funkcyjny postaci $\sum c_n(x-x_0)^n$.
Tw. Cauchy'ego – Hadamarda - szereg potęgowy $\sum a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny w przedziale otw. (x_0-R, x_0+R), gdzie $1/R=\lim_{n->00}(|an|)^{1/n}$. L. R nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego. Wew. przedziału szereg jest ponadto zbieżny bezwzględnie i jednostajnie zbieżny.
Szereg potęgowy można różniczkować wew. przedziału, w którym jest zbieżny, a jego pochodną jest szereg pochodnych jego składników (suma szeregu potęgowego jest f. różniczkowalną w każdym punkcie przedziału (x_0-R,x_0+R)). Analogicznie w przypadku całkowania.
Rozwinięcie f. w szereg potęgowy przy użyciu wzoru Taylora.

• Ekstrema funkcji: jednej zmiennej; wielu zmiennych.
Warunki konieczne i dostateczne. Przykład wyznaczania ekstremum.

Ekstremum – przyjmowane przez f. w punkcie x_0, jeśli w pewnym otw. ot. x_0 f. nie przyjmuje wartości większych (minimum)/mniejszych (max.).
Klasyczny schemat badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej obejmuje:
(1) Wyznaczenie dziedziny f.. Sprawdzenie, czy f. jest okresowa, parzysta, nieparzysta.
(2) Wyznaczenie granic f. na końcach przedziałów, z których w sumie składa się dziedzina f., z wyszczególnieniem końców przedziałów, w których f. jest ciągła.
(3) Wyznaczenie asymptot pionowych, poziomych, ukośnych.
(4) Wyznaczenie punktów charakterystycznych wykresu funkcji, np. miejsc zerowych, wartości w zerze; wyznaczenie zbioru, w którym f. przyjmuje wartości dodatnie, ujemne.
(5) Badanie pierwszej pochodnej: określenie dziedziny pochodnej; wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej oraz zbioru, w którym pochodna jest +,-.
(6) Wyznaczenie przedziałów monotoniczności f.
(7) Wyznaczenie punktów krytycznych f. oraz ekstremów.
(8) Badanie drugiej pochodnej funkcji: określenie dziedziny drugiej pochodnej; wyznaczenie miejsc zerowych drugiej pochodnej oraz zbioru, w którym druga pochodna jest +,-.
(9) Wyznaczenie przedziałów wypukłości i wklęsłości f. oraz punktów przegięcia f.
(10) Zebranie uzyskanych danych o f. w tabeli.
(11) Sporządzenie wykresu w oparciu o uzyskane dane.
Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego f. f w pewnym punkcie $x_0(a,b)$: $f'(x_0)=0$.
Warunek wystarczający - zmiana znaku pochodnej w ot. x_0.
Ogólnie: gdy n-ta pochodna jest 1-szą różną od zera i jest parzysta to jest ekstremum - max. gdy $f^{(n)}(x_0)<0$ lub min., gdy $f^{(n)}(x_0)>0$, wpp. ekstremum nie istnieje.
W przypadku f. np. dwóch zmiennych f:D->R (D - otw. podzb. płaszczyny) - f jest dwukrotnie różniczkowalna i jej druga pochodna jest ciągła:
(1) wyznaczamy wszystkie punkty $(x_0,y_0)\in D$ t. że pochodne cząstkowe się zerują.
(2) Dla każdego znalezionego punktu badamy znak wyznacznika macierzy różniczki tzn. $\det A=|1.f''_{xx}(x_0,y_0),\ f''_{xy}(x_0,y_0),\ 2.\ f''_{yx}(x_0,y_0),\ f''_{yy}(x_0,y_0)|$ $(f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$ na mocy lematu Schwarza).
(3) Jeżeli w danym punkcie wyznacznik jest <0, to w tym punkcie nie ma ekstremum, jeśli =0, to w pewnych przypadkach może ono istnieć, a w pewnych nie. Jeśli>0, to istnieje ekstremum lokalne w tym punkcie (jeśli $f''_{xx}>0$ to min., jeśli $f''_{xx}<0$ to max.).
Ogólnie: jeśli druga różniczka jest dodatnio określono, to f. osiąga ścisłe min. lokalne w punkcie x_0, jeśli ujemnie – ścisłe max., jeśli nieokreślona – nie osiąga ekstremum w punkcie a. (nie wiemy co się dzieje, gdy jest niedodatnio lub nieujemnie określona).

• Całka funkcji jednej zmiennej. Całka nieoznaczona i oznaczona. Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego. Obliczanie całek.
Niech D⊆R będzie przedziałem oraz niech f:D->R będzie f. F. F:D->R nazywamy pierwotną f. f, jeśli F jest różniczkowalna i F'=f.
Całką nieoznaczoną funkcji f nazywamy zbiór jej f. pierwotnych i ozn. $\int f(x)dx$.
Każda f. ciągła ma f. pierwotną. Całka nieoznaczona f. elementarnej nie musi być f. elementarną.
Ważne: liniowość całki; całkowanie przez części; całkowanie f. wymiernych przez rozkład na ułamki proste; całkowanie f. niewymiernych - podstawienia Eulera; całkowanie wyrażeń zawierających f. trygonometryczne, podstawienie t=tgx/2, sinx=2t/1+t2 itd.

Niech [a,b]∈R będzie przedziałem. Wówczas P: $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ nazywamy podziałem przedziału [a,b]. L. $d(P)=^{df}\max_{i=1,...,n}(x_i-x_{i-1})$ nazywamy średnicą podziału P. Wprowadzamy ozn. $\Delta x_i=^{df}x_i-x_{i-1}$ dla i=1,...,n. Ciąg podziałów $\{P_m\}_{m\in N}$ nazywamy normalnym, jeśli $\lim_{m->+oo}d(P_m)=0$.
Niech f:[a,b]->R będzie f. oraz niech P: $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ będzie podziałem przedziału [a,b]. L. $L(f,P)=^{df}\sum\Delta x_i m_i(f,P)$, gdzie $m_i(f,P)=^{df}\inf_{x\in[xi-1,xi]}f(x)$ nazywamy sumą dolną całkową (Darboux). L. $U(f,P)=^{df}\sum\Delta x_i M_i(f,P)$, gdzie $M_i(f,P)=^{df}\sup_{x\in[xi-1,xi]}f(x)$ nazywamy sumą górna całkową (Darboux).
L. $S(f,P)=S(f,P,y_1,...,y_n)=^{df}\sum\Delta x_i f(y_i)$ dla $y_i\in[x_{i-1},x_i]$ nazywamy sumą całkową f. f dla podziału P wyznaczoną przez punkty pośrednie $y_1,...,y_n$.
Niech f:[a,b]->R będzie f. ograniczoną (tzn. ∃M>0 ∀x∈[a,b]: |f(x)|≤M. F. f nazywamy całkowalną w sensie Riemanna w przedziale [a,b], jeśli dla dowolnego normalnego ciągu $\{P_m\}_{m\in N}$ podziałów przedziału [a,b] istnieje granica $\lim_{m->+oo} S(f,P_m,y_1^m,...,y_{nm}^m)$ niezależna od wyboru punktów pośrednich. Granicę tę nazywamy całką Riemanna f. f w przedziale [a,b] i ozn. $\int_a^b f(x)dx$ (jest ona jednoznacznie określona – nie zależy od wyboru ciągu podziałów).

Jeśli $f:[a,b]\to R$ jest f. ograniczoną, to f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedizale [a,b] wtw., gdy dla dowolnego ciągu $\{P_m\}_{m\in N}$ podziałów nromalnych zachodzi $\lim_{m\to+\infty}(U(f,P_m)-L(f,P_m))=0$.
Wprost z def. całki Riemanna wynika, że dla f. nieujemnej całkę $\int_a^b f(x)dx$ możemy interpretować jako pole pod wykresem f. f na przedziale [a,b].
Funkcja niecałkowalna w sensie Riemanna – f. Dirichleta, $f:[0,1]\to R$.
Klasy f. całkowalnych w sensie Riemanna - niech f: $[a,b]\to R$ będzie f. ogr. Jeśli f jest: jest ciągła/ma skończoną ilość punktów nieciągłości/jest monotoniczna, to jest całkowalna w sensie Riemanna. Własności:
- Jeśli zmienimy wartości f. w skończonej ilości punktów, to funkcja nadal pozostanie całkowalna w sensie Riemanna i jej całka nie ulegnie zmianie,
- jeśli $f\le g$, to $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$
- jeśli $f>0$, to $\int_a^b f(x)dx>0$; jeśli $f\ge0$, to $\int_a^b f(x)dx\ge0$.

Całka niewłaściwa.
Zasadnicze tw. rach. Różniczkowego i całkowego wyraża fakt, że podstawowe operacje rachunku różniczkowego i całkowego – różniczkowanie i całkowanie – są operacjami odwrotnymi. Dokładniej, jeżeli dana jest f. ciągła f, to pochodna jej ciałki nieoznaczonej jest równa f. Bezpośrednią konsekwencją tw. jest możliwość wykorzystani f. pierwotnej do obliczania całki oznaczonej danej f. Całkowalność f.: ograniczonej w przedziale [a,b] i mającej w nim tylko skończoną l. punktów nieciągłości; monotonicznej i ograniczonej.
Tw. Jeśli $f:[a,b]\to R$ jest f. ciągłą, F jest pierwotną f. f. f, to $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

- Całki iterowane (twierdzenie Fubiniego). Przykłady obliczania całek iterowanych.

Tw. Fubiniego pozwala liczyć całki wielokrotne (podwójne, potrójne, itd.) po odpowiednich obszarach za pomocą kolejnego liczenia pewnych całek poj. w odpowiednich granicach. Niech K_1 będzie kostką w R^n a K_2 kostką w R^m. Zmienne w R^n ozn. przez x, a w R^m przez y. Weźmy f. $f:AxB\to R$. Zał., że $\forall$ ustalonego $y\in B$ f. f(.,y) jest całkowalna w sensie Riemanna na A oraz że $\forall$ ustalonego $x\in A$ f. f(x,.) jest całkowalna w sensie Riemanna na B. Wtedy $\int_{AxB}f(x,y)dxdy=\int_A(\int_B f(x,y)dy)dx=\int_B(\int_A f(x,y)dx)dy$.
Popularne zastosowanie: $\int_{-oo}^{+oo}e^{\wedge}(-x^2)dx=\sqrt{\pi}$, ponieważ
$[\int_{-oo}^{+oo}e^{\wedge}(-x^2)dx]^2=[\lim_{a\to oo}I(a)]^2$, gdzie $I(a)=\int_{-a}^{a}e^{\wedge}(-x^2)dx$
$(I(a))^2=(\int_{-a}^{a}e^{\wedge}(-x^2)dx)(\int_{-a}^{a}e^{\wedge}(-y^2)dy)=$ [stosujemy tw. Fubiniego do $f(x,y)=e^{\wedge}(-x^2+y^2)$]$=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}e^{\wedge}(-x^2+y^2)dxdy$
Podstawienie biegunowe: x=rcosb, y=rsinb i dostajemy:
$\int_0^{2\pi}\int_0^a re^{\wedge}(-r^2)drdb=\int_0^{2\pi}[-1/2\ e^{\wedge}(-a^2)+1/2]db=$
$=\pi[1-e^{\wedge}(-a^2)]\to\pi$

- Wzór na całkowanie przez podstawienie: dla funkcji jednej zmiennej; dla funkcji wielu zmiennych. Przykład zastosowania.

Przypadek jednowym.:
Tw. o całkowaniu przez podstawianie - Jeśli $I,J\subseteq R$ są przedziałami, $f:I\to J$ jest f. różniczkowalną oraz $g:J\to R$ jest f., dla której istnieje f. pierwotna $G:J\to R$, to istnieje całka nieoznaczona dla f. (gof)f' oraz $\int(gof)f'dx=Gof$.
Wzór całkowania przez podstawianie często zapisujemy jako: $\int g(f(x))f'(x)dx=\int g(t)dt$.
Przypadek wielowymiarowy:
Niech X,Y będą p-niami unormowanymi oraz D niepustym podzb. X. Przekszt. $F:D\to Y$ nazywamy dyfeomorfizmem, jeśli D oraz jego obraz F(D) są zb. otw.; F jest f. odwracaln; F i F^{-1} są klasy C^1.
Zał., że mamy zbiory J-mierzalne B i D w R^n oraz odwz. $F:B\to D$, które jest C^{oo}-dyfeomorfizmem (tzn., że F jest bijekcją klasy C^{oo} i odwz. odwrotne do F też jest tej klasy). Dla odwz. $F(x)=(F_1(x_1,...,x_n),...,F_n(x_1,...,x_n))$ można wypisać macierz Jacobiego (macierz pochodnych cząstkowych, w punkcie $x\in B$). Wyznacznik tej macierzy (w punkcie $x\in B$) nazywamy jakobianem F w punkcie x. Gdy F jest dyfeo., to $\det Jac_xF\neq0$. Współrzędne w zb. D ozn. przez $y=(y_1,...,y_n)$.
Tw. o zmianie zmiennych: Przy ozn. i zał. jw., niech $f:D\to R$ będzie f. ciągłą. Wtedy $\int_D f(y)dy_1...dy_n=\int_B f(F(x))|\det Jac_xF|\ dx_1...dx_n$. Np. wspołrz. biegunowe, x=rcosa, y=rsinb, $\det Jac_xF=r$; wspólrz. sferyczne: x=rsinbcos, y=rsinbsina, z=rcosb, $\det Jac_xF=r^2\sin b$.
Załóżmy, że dla każdego $A>a$ f. $f:[a,+oo)\to R$ jest całkowalna w przedziale [a,A]. Granicę $\int_a^{+oo}f(x)dx=\lim_{A\to+oo}\int_a^A f(x)dx$ nazywamy całką niewłaściwą f. f w granicach od a do +oo. Jeżeli granica ta istnieje i jest skończona, to mówimy, że całka ta jest zbieżna, w przeciwnym przypadku mówimy, że jest rozbieżna. Analogicznie określamy całkę niewłaściwą w granicach od -oo do a i od -oo do +oo.

- Twierdzenie o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy w teorii całki Lebesgue'a. Przykład zastosowania.

Niech (f_n) będzie ciągiem f. M-mierzalnych określonych na zb.A, punktowo zbieżnych na tym zb. do f. f. Wówczas, jeśli istnieje f. nieujemna g u-całkowalna na zb.A t. że. $|f_n(x)|\le g(x)$ dla dowolnych $x\in A$, $n\in N$, to f. f_n, f są u-całkowalne na A oraz $\int_A fdu=\lim_{n\to+oo}\int_A f_n du$.

- Przykład wzoru zamieniającego całkę po obszarze na płaszczyźnie na całkę po brzegu tego obszaru.

Tw. (wzór) Greena – Jeżeli K jest krzywą płaską zamkniętą skierowaną dodatnio i ograniczającą obszar jednospóny D, przy czym w obszarze D dane są f. P(x,y) i Q(x,y) mające ciągłe pochodne cząstkowe w obszare D i na brzegu K, to zachodzi wzór $\int_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\int_D(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y)dxdy$, np.:
$1/2\int_K xdy-ydx=\int\int_D dxdy$ – pole koła
Podstawienie: x=acost, y=asint (a – promień koła, $t\in[0, 2\pi]$
$1/2\int_K xdy-ydx=1/2\int_0^{2\pi}(acostacost-asint(-asint))dt=1/2\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2t+a^2\sin^2t)dt==1/2\ a^2t|_0^{2\pi}=\pi a^2$

GAL

1. Rozwiązywanie układów równań liniowych. Elementarne operacje na macierzach, metoda eliminacji Gaussa. Twierdzenia Kroneckera-Cappelli'ego i Cramera.

Ukł. równań lin. rzeczywistych o niewiadomych (zmiennych) $x_1,...,x_n$ nazywamy układ równań postaci,
U: $\{a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1;...;a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=b_m$,
gdzie współcz. a_{ij} oraz b_i są l. rzeczywistymi. Ukł. nazywamy jednorodnym, jeśli $b_1=...=b_n=0$. Rozw. ukł. U – każdy ciąg liczb $s_1,...,s_n$, które po podstawieniu za zmienne $x_1,...,x_n$ spełnia wszystkie równania ukł. U. Ukł. sprzeczny – nie ma rozw. Podst. metoda rozw. ukł. U polega na zastąpieniu go prostszym ukł. mającym ten sam zb. rozw. Dwa ukł. są równoważne, jeśli posiadają te same zb. rozw. Ukł. U można przypisać macierz.
Następujace transformacje macierzy nazywamy operacjami elementarnymi na wierszach/kolumnach:
(i) dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego prez liczbę,
(ii) zamiana dwóch wierszy miejscami
(iii) pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera
Metoda eliminacji Gaussa – metoda znajdowania zb. rozw. układu równ. lin. Każdy niesprzeczny układ równań lin. ma rozw. ogólne. Aby je znelźć wystarczy macierz tego ukł. sprowadzić do zredukowanej postaci schodkowej elementarnej operacjami na wierszach (w każdym niezerowym wierszu pierwszy niezerowy wyraz wynosi 1 i jest jedynym niezerowym wyrazem w swojej kolumnie). Jeśli otrzymana macierz nie zawiera wiersza postaci 0...01, to można z niej odczytać rozw. ogólne ukł. U, wpp. układ U jest sprzeczny.
Tw. Kroneckera Capelliego:
- układ U ma rozw. wtw. Gdy $r(a)=r(A_u)$ (jednoznaczne wtw. gdy $r(A)=r(A_u)=n$)
- p-ń rozw. ukł. jednorodnego odpowiadającego ukł. U ma wym. n-r(A)
- jeśli a jest rozw. układu U, W jest p-nią rozw. ukł. jednorodnego odpowiadającego układowi U, to zb. rozw. ukł U jest postaci $a+W=\{a+b|b\in W\}$
Wzory (tw.) Cramera – Niech U będzie ukł. n równań lin. z n niewiadomymi o macierzy współczynników A i kolumnie wyrazów wolnych B. Zał, że $\det A\neq0$. Wówczas układ U ma dokładnie jedno rozw. $s_1,...,s_n$ przy czym $\forall i$ $s_i=\det G_i\backslash\det A$, gdzie Gi jest macierzą powstała z A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną B.

2. Ciała: definicja, przykłady. Liczby zespolone: własności, postać trygonometryczna, pierwiastkowanie, zasadnicze twierdzenie algebry.

Zb. K zawierający co najmniej 2 el-ty jest ciałem, jeśli:
(i) zadane są odzworowania KxK->K – działania: + i mnożenia
(ii) wyróżniony jest el-t zerowy (0) i jedynkowy (1) w zb. K

(iii) spełnione są kasjomaty ciała – łączność/przemienność dodawania, 0 jest el-tem neutralnym +, ∃el-t przeciwny w dodawaniu, łączność/ przemienność mnożenia, 1 jest el-tem netrualnym mnożenia, ∃el-t odwrotny w mnożeniu, rozdzielność mnożenia wzgl. dodawnia. Np. R – zb. l. rzeczywistych z działaniami + i mnożenia i l. 0,1 jako el-tami wyróżnionymi; ciało $Z_p=\{0,1,...,p-1\}$, gdzie p - l. pierwsza z działaniami + i mnożeniem modulo p i z l. 0,1 jako el-tami wyróżnionymi.
Ciało l. zespolonych (C) to ciało, którego el-tami są wszystkie uporządkowane pary l. rzeczywistych, w kórym działanie jest określone zwzorami (a,b)+c,d)=(a+c,b+d); (a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc) – jego podciałem jest ciało l. rzeczywistych. Niech z=a+bi – a – cz. Rzeczywista z, b – cz. Urojona, $|z|=\sqrt{(a^2+b^2)}$ – moduł l. z, z^- a-bi – l. sprzężona do z . Własności – nierónośc trójkąta z+ z^- =2Rez, z $z^-=|z|^2$ itd. Interpretacja geom. C jako punktów płaszczyzny.
Postać trygonometryczna l. zespolonej $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ (θ - argument l. zespolonej, wyznaczony z dokładnością do wielokrotności 2π). Wzór de Moivre'a o podnoszeniu do n-tej potęgi: $z^n=|z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.
Niech w będzie l. zespoloną i n∈N, pierwiastki wielomian z_n-w∈C[z], czyli rozw. równania $z^n=w$, nazywamy pierwiastkami st. n z liczby w $w^{1/n}=|z|^{1/n}(\cos[(\theta+2\pi k)\backslash n]+i\sin[(\theta+2\pi k)\backslash n])$.
Zasadnicze tw. algebry: C jest ciałem algebraicznie domkniętym tzn. każdy wielomian st.>0 o współcz. Z C daje się rozłożyć nad C na czynniki st. 1.

3. Przestrzenie liniowe: definicja, przykłady. Układy liniowo niezależne, bazy, wymiar przestrzeni liniowej.

P-nią lin. (wektorowa) nad ciałem K – zb. V z odwzorowaniami VxV->V: dodawniem wektorów i KxV->V mnożeniem wektora przez sklalar; oraz z wyróżnionym el-tem w V zwanym wektorem zerowym (0), przy czym spełnione są następujące aksjomaty p-ni lin.: łączność/przemienność dodawania wektorów; wektor 0 jest el-tem neutralnym +; ∃wektora przeciwnego; rozdzielność mnożenia wzgl. dodawania wektorów/skalarów; łączność mnożenia przez skalary; 1 jest el-tem neutlranym mnożenia. Elementy V – wektory. Np. K^n – zb. wszystkich ciągów n-el-towych o wyrazach z ciała K, wektor zerowy (0,...,0); $M_{mxn}(K)$ – zb. wszystkich macierzy mxn o wyrazach z ciała K; K[X] – zb. wszystkich wielomianów zm. x o współcz. W ciele K; F(X,K) – zb. wszystkich f.:X->K.
Niech V – p-ń lin. nad ciałem K $A_1,...,A_k$∈V. Kombinacją lin. ukł. wektorów $A_1,...,A_k$ o współcz. $a_1,...,a_k$∈K nazywamy wektor: $B=a_1A_1+...a_kA_k=\Sigma a_iA_i$.
Ukł. wektorów A1,...,Ak rozpina p-ń V, jeśli $V=\mathrm{lin}(A_1,...A_k)$ (V jest komb. Lin. wektorów $A_1,...,A_k$).
Ukł. $A_1,...,A_k$ jest lin. niezależny, jeśli nie jest liniowo zależny, tzn. $a_1A_1+...a_kA_k=0 \Rightarrow a_1=...=a_k=0$.
Ukł. $A_1,...,A_k$ wektorów p-ni V nazywamy bazą p-ni V, jeśli spełnia on 2 warunki: układ $A_1,...,A_k$ jest lin. niezależny; ukł. ten rozpina V. $A_1,...,A_k$ (ukł. wektorów z V) jest bazą p-ni V wtw. gdy każdy wektor A∈V można jednoznczanie przedstawić jako komb. lin. tego układu.
P-ń V jest n-wym., jeśli V posiada bazę złożoną z n wektorów (oz. dimV=n) i l. n nazywamy wymiarem p-ni V. Dla p-ni zerowej V={0} ,przyjmujemy dimV=0. P-ń jest skończenie wym., gdy n∈NU{0} (wpp. dimV=oo).

4. Przekształcenia liniowe: definicja, przykłady, macierz przekształcenia liniowego. Monomorfizmy, epimorfizmy, izomorfizmy. Jądro i obraz przekształcenia liniowego.

V,W – p-nie lin. nad ciałem K. F. F:V->W nazywamy przekształcenie lin., jeśli dla dowolnych A,B∈V oraz ∀a∈K zachodzi: F(A+B)=F(A)+F(B); F(aA)=aF(A). np. przyporządkowanie wielomianowi jego pochodnej; przyporządkowanie funkcji wartości w punkcie x_o F(X,K)->K, $F(f)=f(x_0)$; przyporządkowanie f. ciągłej całki z tej funkcji C([0,1])->R: $F(f)=\int_0^1 f(x)dx$. Przekształcenie: rzut na V_1, wzdłuż V_2; symetria wzgl. V_1 wzdłuż V_2; włożenie W w V; homotetia (jednokładność) o skali a∈K; przekształcenie zerowe (wszystko na zero), obrót o kąt θ∈R.
Niech V,W – p-nie lin. nad ciałek K, F: V->W przekszt. Lin., $A=(A_1,...,A_n)$ – baza p-ni V i $B=\{B_1,...,B_m\}$ – baza p-ni W. Macierzą przekszt. F w bazach A,B nazywamy taką macierz $C=[c_{ij}]\in M_{mxn}(K)$, że $F(A_j)=\Sigma_{i=1}^m c_{ij}B_i$, tzn. w j-tej kolumnie macierzy A stoją współrzędne wektora $F(A_j)$ w bazie B. Ozn. $M(F)^B{}_A=C$ (dla każdego j=1,...,n).
Niech F:V->W – przekszt. Lin.
Monomorfizm – gdy F jest różnowartościowe, tzn. gdy ∀A,B∈V: jeśli F(A)=F(B) to A=B. Przeprowadza każdy ukł. lnz w ukł. lnz, a bazę p-ni V w ukł. lnz. (kerF={0}).
Epimorfizm – gdy F jest na tzn. gdy ∀G∈W∃A∈V t. że F(A)=G; przeprowadza każdy ukł. rozpinający V na ukł. rozpinający W, a bazę p-ni V na ukł. rozpinający p-ń W (imF=W).
Izomorfizm – gdy F jest różnowartościowe i na (jest bijekcją); dimV=dimW<oo. Przeprowadza każdą(pewną) bazę p-ni V na bazę p-ni W.
Jądro przekszt. F – zb. kerF={A∈V|F(A)=0}⊂V (podp-ń V).
Obraz przekszt. F – zb. imF={F(A)|A∈V}⊂W (podp-ń W).

5. Przestrzenie własne i wartości własne endomorfizmów liniowych, sposoby ich znajdowania. Podobieństwo macierzy, diagonalizowalność, postać Jordana macierzy, twierdzenie Jordana.

Niech V będzie p-nią liniową nad ciałem K. Przekszt. Lin. V->V nazywamy endomorfizmem p-ni V. Zb. wszystkich endo. P-ni V ozn. End(V)(=L(V,V)). Macierzą endomorfizmu F:V-> w bazie A nazywamy macierz $M(F)^A{}_A$; rzędem l. r(F)=dim imF.
Jw. i niech F∈End(V). Wektor A∈V nazywamy wektorem wł. Endo. F, jeśli A≠0 i ∃a∈K t. że F(A)=aA. Wówczas el-t a∈K nazywamy wartością wł. Endo F.
Jeśli a jest wartością wł. endo. F to zb. $V_{(a)}$={A∈V|F(A)=aA} nazywamy podp-nią wł. odpowiad. wartości wł. a, składa się ona ze wszystkich wektorów wł. o wartości wł. a oraz z wektora zerowego. np.$V_{(0)}$=kerF, jeśli 0 jest wartością wł. endo. F.
Niech $A\in M_{nxn}(K)$, wielomian w(L)=det(A-LI) ∈K[L], gdzie K[L] jest p-nią wielomianów zmL o współczynnikach z ciałaK, nazywamy wielomianem charakterystycznym macierzy A.
Wielomianem charakt. Endo. F nazywamy wielomian charakt. Macierzy $M(F)_A{}^A$ dla dowolnej bazy A p-ni V.
Niech V będzie skończenie wym. p-nią lin. nad ciałem K i niech F∈End(V). Wówczas:
(i) el-t a∈K jest wartością wł. endo F wtw. gdy a jest pierwiastkiem wielomianu charakt.
(ii) niech A będzie bazą p-ni V, $A=M(F)_A{}^A$ i niech wektor 0≠A∈V ma w bazie A współ. X1,...,xn. Wówczas A jest wektorem wł. F o wartości wł. a wtw. gdy $(A-aI)[x_1,...,x_n]=[0,...,0]$.
Macierze $A,B\in M_{nxn}(K)$ nazywamy podobnymi, jeśli istnieje macierz odwracalna $C\in M_{nxn}(K)$ (czyli, taka dla której istnieje macierz odwrotna – nieosobliwa detC≠0) t. że $B=C^{-1}AC$.
Macierze A,B są podobne wtw. gdy A,B są macierzami tego samego endo. (jedna w jednej bazie, druga w drugiej). Jeśli A,B są podobne to detA=detB, trA=trB, r(A)=r(B) oraz mają ten sam wieomian charakterystyczny. Podoobieństwo macierzy jest relacją równoważności w $M_{nxn}(K)$.
Macierz $A\in M_{nxn}(K)$ nazywamy diagonalną, jeśli $a_{ij}=0$ ∀i≠j (tylko wyrazy na przekatnej mogą być niezerowe). Mówimy, że endo F jest diagonalizowalny:
- jeśli istnieje baza p-ni V złożona z wektorów wł. endo. F,
- wtw. gdy ma w pewnej bazie macierz diagonalną,
- jeśli ma n różnych wartości wł. (dim V=n).
- wtw. gdy zachodzi równość $\dim V_{(a1)}+...\dim V_{(ak)}=\dim V$.
Macierz $A\in M_{nxn}(K)$ nazywamy diagonalizowalną nad ciałem K, jeśli jest ona podobna do macierzy diagonalnej należącej do $M_{nxn}(K)$.
Macierz $A\in M_{nxn}(K)$ jest w postaci Jordana, jeśli A ma na przekątnej $A_1,...,A_k$, w pozostałych miejscach – 0, gdzie każda z macierzy $Aj\in M_{rjxrj}(K)$ jest postaci A_j=[1. a_j 10...0, 2. 0a_j10...0, ..., rj. 0,...,0a_j], $n=r_1+...r_n$. Macierze A1,...,Ak nazywamy klatkami Jordana macierzy A, $a_1,...,a_k$ są wartościami wł. A.
Tw. Jordana:
(i) Niech V będzie skończenie wym. p-nią lin. nad ciałem algebr. Domk. K i niech F∈End(V). Wówcas ∃taka baza A p-ni V (baza Jordana), że $M(F)_A{}^A$ jest w postaci Jordana; równoważnie:
(ii) Jeśli K jest ciałem algebr. Domk. to każda macierz $A\in M_{nxn}(K)$ jest podobna do macierzy w postaci Jordana, należącej do $M_{nxn}(K)$.
Znalezienie postaci Jordana macierzy, polega na znalezieniu wartości własnych macierzy $(a_1,...,a_k)$ i znalezienie rzędów potęg macierzy $r(A-a_iI)^m$ i badaniu różnic rzędów kolejnych potęg (dostajemy l. klatek odpow. Wielkości, odpowiadających wartości własnej a_i).
Dwie macierze w postaci Jordana, pochodzące od tej samej macierzy A, różnią się co najwyżej kolejnością klatek.

6. Rząd, wyznacznik i ślad macierzy. Sposoby obliczania. Przykłady zastosowań.

Rząd macierzy $A\in M_{mxn}(K)$ – l. dim $\mathrm{lin}(a_1,..,a_m)$=dim $\mathrm{lin}(b_1,...,b_n)$ ∈NU{0}, gdzie wektory $a_1,...,a_m\in K^n$ są wierszami macierzy A, wektory $b_1,...,b_n\in K^m$ są kolumnami A (ozn. r(a)). Niech

$A \in M_{mxn}(K)$ i niech $A' \in M_{mxn}(K)$ będzie macierzą schodkową otrzymną z A elementarnymi operacjami na wierszach wówczas r(A)=l. niezerowych wierszy macierzy A'. Zawsze $r(A)=r(A^T)$.
Wyznacznik – f., która przyporządkowuje każdej macierzy kwadratowej A o wyrazach z ciała K pewien element z ciała K, ozn. Det A i spełniający: jeśli $A=[a] \in M_{1x1}(K)$ to detA=a; jeśli $A=[1. a_{11},...,a_{1n},...,n. a_{n1},...,a_{nn}] \in M_{nxn}(K)$, gdzie n>1, to detA= $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}detA_{1j}$. Własności: $DetA^T=DetA$ ($b_{ij}=a_{ji}$ $\forall i,j$, $B=A^T$); zamiana miejscami wierszy/kolumn detB=-detA; pomnożenie wiersza przez $c \in K$ detB=cdetA; jeżeli A jest macierzą trójkątną to detA=iloczynowi wyrazów na przekątnej macierzy A; det(AB)=detAdetB, gdzie $A,B \in M_{nxn}(K)$ – tw. Cauchy'ego.
Rozwinięcie Laplace'a wzgl. j-tej kolumny (i-tego wiersza), $A \in M_{nxn}(K)$: $detA=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}detA_{ij}(=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}detA_{ij})$.
Ślad macierzy $A=[aij] \in M_{nxn}(K)$ - suma wyrazów stojących na przekątnej macierzy A tzn. $trA=\sum a_{ii} \in K$. Dla każdych macierzy $A,B \in M_{nxn}(K)$ zachodzi tr(AB)=tr(BA).

7. Przestrzenie przekształceń liniowych. Funkcjonały liniowe, przestrzeń sprzężona do przestrzeni liniowej, baza sprzężona.

Zb. wszystkich przekszt. Lin. V->W ozn. L(V,W). L(V,W) jest p-nią lin. nad ciałek K.
Funkcjonał liniowy – przekształ. Liniowe p-ni liniowych nad Ciałem K o wartościach w jednowymiarowej p-ni liniowej K. F. f: V->K nazywa się funkcjonałem lin. (formą liniową) jeśli jest ona jednorodna i addytywna tzn. f(ax)=af(x), f(x+y)=f(x)+f(y).
Niech V będzie dowolną p-nią liniową nad ciałem K. P-ń funkcjonałów liniowych L(V,K) będziemy ozn. Przez V* i nazywali p-nią sprzężoną p-ni V. Jest ona p-nią lin. nad ciałek K ze wzgl. na dodawanie i mnożenie przez skalar z ciał K funkcjonałów ((f+g)(x)=f(x)+g(x), (af)(x)=af(x), gdzie $f,g \in V^*$, $a \in K$, $x \in V$.
Bazę $(F_1,...,F_n)$ p-ni V* wyznaczoną przez bazę $(a_1,...,a_n)$ p-ni V oraz bazę p-ni K złożoną z el-tu 1 nazywamy bazą bazą sprzeżoną z bazą $(a_1,...,a_n)$. Funkcjonały $F_1,...,F_n$ są jednoznacznie wyznaczone przez warunki Fi(aj)={0 gdy $i \neq j$, 1 gdy i=j.
Jeżeli p-ń V jest skończenie wym. i dimV=n, to dimV*=n. P-ni V oraz V* są izomorficzne (nie kanonicznie).

8. Formy dwuliniowe i kwadratowe: definicje, przykłady, macierz formy dwuliniowej. Diagonalizacja form dwuliniowych i kwadratowych, twierdzenie o bezwładności.

Niech V będzie p-nią lin. nad ciałem K.
Funkcję h:VxV->K nazywamy formą (funkcjonałem) dwuliniową na p-ni V, jeśli f/ ta jest liniowa wzgl. pierszwej i drugiej zmiennej. Np.:
- h: R^2xR^2->R, $h((x_1,x_2),(y_1,y_2))=x_1y_1-2x_1y_2+3x_2y_1+5x_2y_2$;
- h: C[a,b]xC[a,b]->R, $h(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$ – forma dwulin. na p-ni C[a,b] (%).
Funkcję q:V->K nazywamy formą kwadratową na p-ni V, jeśli istnieje forma dwulin. H:VxV->K t. że $\forall A \in V$ zachodzi q(A)=h(A,A); np. $q((x_1,x_2,x_3))=x_1^2+4x_1x_2+7x_2^2-6x_2x_3+3x_3^2$ – forma kwadratowa na R^3.
Niech h:VxV->K będzie formą dwuliniowa na p-ni V i niech $A=\{A_1,...,A_n\}$ będzie bazą p-ni V. Macierzą formy h w bazie A nazywamy maceirz $G(h,A)=[h(Ai,Aj)] \in M_{nxn}(K)$. Macierzą formy kwadratowej q w bazie A p-ni V nazywamy macierz formy dwuliniowej symetr. (h(A,B)=h(B,A)) odopowiadającej formie q.
Diagonalizacja form kwadratowych zadanych na p-niach skończenie wym., tzn. znajdowanie dla danej formy kwadratowej q jej przestawienia w postaci $q(\sum x_id_i)= \sum a_ix_i^2$, przy $x_1,...,x_k \in K$ dla pewnej bazy $A_1,...,A_n$ p-ni V. Takie przedstawienie nazywamy postacią diagonalną formy kwadratowej.
Metody diagonalizacji:
- za pomocą bazy prostopadłej (A) p-ni dwuliniowej (V,h) – w bazia A forma q ma postać diagonalną
- za pomocą wektorów wł. symetr. macierzy rzecz. (dla K=R)
- metoda uzupełniania do do kwadratu – wskazujemy ciąg zamian zmiennych we wzorze na q i podajemy za każdym razem odpowiadającą zamianie zamianę bazy p-ni V.
Tw. o bezwaładności - Niech $A=\{A_1,...,A_n\}$ oraz $B=\{B_1,...,B_n\}$ będą bazami prosopadłymi p-ni dwuliniowej (V,h) nad ciałem R. Ozn. $r_+(A)$= l. takich $1 \leq i \leq n$, że $h(A_i,A_i)>0$; $r_-(A)$= l. takich i, że $h(A_i,A_i)<0$; $r_+(B)$= l. takich i, że $h(B_i,B_i)>0$; $r_-(B)$= l. takich i, że $h(B_i,B_i)<0$. Wówczas $r_+(A)=r_+(B)$, $r_-(A)=r_-(B)$; ponadto $r_+(A)+r_-(A)=r(h)=r_+(B)+r_-(B)$.

9. Iloczyny skalarne: definicja, przykłady, kryterium Sylvestera. Przestrzenie euklidesowe, miary, kąty. Izometrie.

Niech V będzie p-nią lin. nad ciałem R. Funkcję <v>: VxV-> nazywamy il. Sk. Na p-ni V, jeśli spełnione są następujące warunki: liniowość względem pierwszej i drugiej zmiennej; symetria; dodatnia określoność (oprócz A=0) np. (%) z 8. Własności i in.: dł. Wektora ($||A||=\sqrt{<A,A>}$); wektory prostopadłe (<A,B>=0); nierówność Schwarza, nierówność trójkąta.
Kryterium Sylvestera – Niech V będzie p-nią lin. nad R i niech $A=\{A_1,...,A_n\}$ będzie jej bazą. Dla macierzy symetrycznej $A=[a_{ij}] \in M_{nxn}(R)$ rozpatrzmy f. <,>: VxV->R zadaną $\forall$wektorów $\sum x_iA_i$, $\sum y_jA_j$ p-ni V wzorem $<\sum x_iA_i, \sum y_jA_j>=\sum_{i,j}a_{ij}x_iy_j$. N.w.s.r.:
(i) F. <,>: VxV->R jest il. Sk. Na p-ni V;
(ii) $detA^{(i)}>0$ dla i=1,...,n (gdzie $A^{(i)} \in M_{ixi}(K)$ – macierz powstała z A przez usunięcie ostatnich n-i wierszy i kolumn).
Parę (V,<,>), gdzie V jest skończenie wym. p-nią lin. nad R, a <,> jest il. Sk. Na V nzywamy p-nią euklidesową (liniową) np. R^n ze standardowym il. Sk.
Niech $A_1,...,A_k$ będzie ukł. wektorów p-nie euklides. (V,<,>). Macierzą Grama ww. ukł. nazywamy macierz $G(A_1,...,A_k)=[<A_i,A_j>] \in M_{kxk}(R)$. Wyznacznikiem Grama ww. ukł. nazywamy l. $W(A_1,...,A_k)= detG(A_1,...,A_k) \in R$.
Pierwiastek z wyznacznika Grama stanowi k-wym. miarę (obj.) równoległościanu, podzielony przez k! – k-wym miarę (obj.) sympleksu.
Niech <,> il. Sk.; A,B – niezerowe wektory p-ni V. Liczbę $\theta \in [0,\pi]$ t. że $<A,B>/||A||||B||=\cos\theta$ nazywamy (niezorientowanym) kątem między wektorami A i B.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Równania różniczkowe:
- w postaci różniczek M(x,y)+N(x,y)=0 ($M_Y(x,y)=N_X(x,y)$ – różniczka zupełna)
- liniowe x'+p(t)x=q(t) (jednorodne, gdy $q(t)\equiv 0$ – o zm. rozdzielonych)
- sprowadzalne do równań lin.: Bernoulliego ($x'+p(t)x+q(t)x^n=0$ – podstawienie $z=x^{1-n}$), Ricattiego ($x'+p(t)x+q(t)x^2+r(t)=0$)
- autonomiczne x'=f(x),
- liniowe 2-go rzędu x''+p(t)x'+q(t)x=r(t).

1. Istnienie rozwiązań równań różniczkowych. Zagadnienie Cauchy'ego, istnienie rozwiązań lokalnych, jednoznaczność rozwiązań, przykłady.

Równaniem różniczkowym zw. Rzędu n nazywamy równanie $F(t,x,x',x'',...,x^{(n)})=0$. Rozw. Równania nazywamy f. F(t) kl. C^n, która podstawiona do równania zmienia to równanie w tożsamość. Wykres funkcji F(t) – krzywa całkowa. Równanie n-tego rzędu w postaci $x^{(n)}(t)=f(t,x',...,x^{(n-1)})$ (&&). Ozn. $X_0(t)=x(t),x_1(t)=x'(t),...,x_{n-1}(t)=x^{(n-1)}(t)$, wprowadzając nową zm. zależną $x\hat{}(t)=(x_0(t),...,x_{n-1}(t))$ i możemy równanie 1-szego rzędu $x\hat{}'=g(t,x\hat{})$ jest wektorem $g(t,x\hat{})= (x_1(t),x_2'(t),...,f(t,x_0,...,x_{n-1}))$.
Jeśli $F(t;c_1,...,c_m)$ jest rodziną f. sprametryzowaną m parametrami $c_1,...c_m$, t. że $\forall(c_1,...,c_m)$ $F(t;c_1,...,c_m)$ jest krzywą całkową równania x'=f(t,x) i $\forall(t_0,x_0) \in G$ istnieją parametry $(c_1^0,...,c_m^0)$ t. że $F(t;c_1^0,...,c_m^0)$ jest krzywą całkową przechodzącą przez punkt (t_0,x_0), to rodzinę $F(t;c_1,...,c_m)$ nazywamy rozw. Ogólnym równ. x'=f(tx,).
Warunek postaci $x(t_0)=x_0$ ograniczający zb. rozw. Równania pierwszego rz. x'=f(t,x) nazywa się warunkiem początkowym (Cauchy'ego). Równanie x'=f(t,x) (&) uzupełnione warunkiem $x(t_0)=x_0$ nazywa się zagadnieniem pocz. (zag. Cauchy'ego). Rozw. Zag. Pocz. Nazywamy funkcję F(t) kl. C1, spełniającą (&) i war. Pocz. Zag. Pocz. Dla (&&) ma formę x(t0), $x'(t_0)=x_1,...,x^{(n-1)}(t_0)=x_{n-1}$.
Tw. Picarda-Lindelofa – Niech f. $f(t,x):R^{m+1}->R^m$ będzie ciągła w zb. $Q=\{(t,x):|t-t_0|\leq a, |x-x_0|\leq b\}$, przy czym $sup_{(t,x)\in Q}|f(t,x)|=M$ oraz niech spełnia war. Lipschitza wzgl. Zm. x w zb. Q tj. $|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leq L|x_1-x_2|$ dla pewnej stałej L. Wtedy zag. Cauchy'ego (&),$x(t_0)=x_0$ ma jednoznaczne rozw. Na przedziale $|t-t_0|\leq A$, gdzie A<min(a,b\n,1\L).
Istenieni rozw. Można zagwarantować dla znacznie szerszej kl. Równań, ale traci się wtedy własność jednoznaczności rozw:
Tw. Peano - Niech f. $f(t,x):R^{m+1}->R^m$ będzie ciągła w zb. $Q=\{(t,x):t\in[t_0,t_0+a], |x-x_0|\leq b\}$, przy czym $sup_{(t,x)\in Q}|f(t,x)|=M$ Wtedy zag. Cauchy'ego (&),$x(t_0)=x_0$ ma rozw. na przedziale $[t_0,t_0+A]$, gdzie A=min(a,b\n).

Np. równanie $x'=x^{1/3}$ (sepłnia tw. PL wszędzie poza prostą x=0 – brak jednoznaczności rozw. – wychodzi z + i z -).

2. Przedłużalność rozwiązań. Zachowanie rozwiązania przy przedłużaniu.

Tw. P-L i Peano gwarantują jedynie istnienie rozw. Lokalnych. Jeśli F(t) jest rozw. Na pewnym przedziale $[t_0,t_0+a]$, to przyjmując $t_1= t_0+a$ i $F(t_1)$ za nowy war. Pocz., można rozw. Rozważane równanie na przedziale $[t_1,t_1+a]$ itd. (analogicznie w lewo).
Rozw. F(t) określone na przedziale $J\subset R$ nazywa się rozw. Wysyconym, jeśli nie isteniej przedłużenie tego rozw. Na przedział J_1 t. że J jest jego podzb. Właściwym. Przedział J nazywa się wtedy max. Przedziałem istnienia rozw. F(t).
Tw, (o zachowaniu się rozw. Na brzegu max. Przedziału istenia rozw.) – Niech f(t,x) będzie f. ciąłą w zb. otw. $E\subset R^{m+1}$ i niech F(t) będzie rozw. Równania (&) w pewnym przedziale $[t_0,t_0+a]$. Wtedy f. F(t) możę być przedłużona jako rozw. Równania (&) fo rozw. Wysyconego z max. Przedziałem istenia rozw. (w_-,w_+). Jeśli ciąg punktów $\{t_n\}$ jest zbieżny do jednego z krańców przedziału (w_-,w_+), to ciąg $\{(t_n,F(t_n))\}$ jest zb. do brzegu zb. E. Jeśli zb. E jest nieograniczony, to zbieżność do brzegu zb. E oznacza, że ciąg punktów (tn,F(tn)) może być nieograniczony dla $t_n\text{->}w_+$ lub $t_n\text{->}w_-$.

3. Własności rozwiązań układów równań liniowych. Rozwiązania układu jednorodnego, przestrzeń rozwiązań, układ fundamentalny, wyznacznik Wrońskiego, konstrukcja rozwiązania układu niejednorodnego.

W 1 – sprowadzenie równania rz. n do układu pierwszego rzędu. x'='(t)x+f(t) (##) z war. Pocz., gdzie A(t) – macierz (mxm), x(t),f(t) – f. o wartościach wektorowych.
Tw. Jeśli f. A(t) i f(t) są ciągłe dla $t\in(a,b)$, to przez każdy punkt zb. $Q=(a,b)xR^m$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa równ. (##).
Tw. Rozw. Równania jednorodnego x'=A(t)x (#) tworzą m-wym. P-ń liniową E. Jeśli $x_c(t)$ jest rozw. Szczególnym równania niejednorodnego (##), a wketory $x_i(t)$ (i=1,..,m) są bazą p-ni E, to rozw. Ogólne równ. (##) ma postać $x(t)=x_c(t)+c_1x_1(t)+...c_mx_m(t)$, gdzie $c_i\in R$.
Zał. że mamy pewną bazę p-ni E złożonej z rozw. Równania (#). Baza ta składa się z m f. $x_1(t),...,x_m(t)$. Budujemy z nich macierz X(t) tak, by kolejne wektory $x_i(t)$ tworzyły jej kolumny. Wektory te nazywamy fundamentalnym układem rozw. Równania, a wyznacznik $\Delta(t)$ – wyznacznikiem Wrońskiego układu f. $x_1(t),...,x_m(t)$.
Macierz kwadratowa X(t) o wym. Mxm spełniająca równanie X'=A(t)X, dla której $\Delta(t)\neq 0$, nazywa się macierzą fundamentalną układu (#).
Każde liniowe równ. jednorodne postaci (#) ma ukł. fundament.
Niech bedzie dane zagadnienie poczatkowe dla równania niejednorodnego (##) z war. pocz. rozw. tego zag. ma postać $x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0+X(t)IX^{-1}(s)f(s)ds$.
Niech będą dane dwie f. $x_1(t),x_2(t)$ różniczkowalne na przedziale (a,b). Wyrażenie $W(x_1,x_2)(t)=\det(1.\ x_1(t),x_2(t),\ 2.\ x'_1(t),x'_2(t))=x_1(t)x_2'(t)-x_2(t)x_1'(t)$ nazywamy wyznacznikiem Wrońskiego ukł. f. $x_1(t)$, $x_2(t)$ (jeśli $\neq 0$ to układ nazywamy lin. niezależnym).

4. Układy liniowe o stałych współczynnikach. Konstrukcja rozwiązań, wykorzystanie postaci Jordana macierzy.

Dla układów 1-go rzędu o stałych współczynnikach istnieją skuteczne metody znajdowania rozw. Rozważmy ukł. jednorodny x'=Rx (@), gdzie R – stała macierz mxm, war. pocz. $x(t_0)=x_0$. Gdyby równanie (@) było równaniem skalarnym, to rozw. zag. pocz. byłaby f. $x(t_0)=x_0e$^[R(t-t_0)].
Jeśli A jest macierzą kwadratową. Mxm to e^A def. Jako sume szeregu $I+A+1\backslash 2!A^2+...+1/n!A^n+...$, gdzie napis A^n ozn. N-krotne mnożenie macierz A.
Macierzą fundamentalną (@) jest exp(Rt) – jak obliczać? Jeśli R jest macierzą diagonalną (na przekątnej $L_1,...,L_m$), to e^{Rt} jest diagonalne i na przekątnej (e^[L_1t],..., e^[L_mt]). Na mocy tw. Jordana istnieje przekształcenie lin. Q, t.że Q-1RQ=J, J – w postaci klatkowej Jordana. Należy znaleźć wartości wł. macierzy R (pierwiastki p(L)=det(R-LI)). Każdy pierwiastek jest wartością wł. Macierzy R i odpowiada mu pewien wektor własny (pierwiastkom wielokrotnym może odpowiadać mniejsza l. wektorów własnych). Gdy pierwiastki są jednokrotne i rzeczywiste - $x_i(t)$=e^[L_it]v_i jest rozw. równania dla wektora wł. v_i. Wektory $x_i(t)$ tworzą p-ń rozw i wyznaczają macierz fund.

Pierwiastki zespolone $L_1=A+iB$, $L_2=A-iB$ – para wartości wł., $v_1=u+iw$, $v_2=u-iw$. Niezależne lin. rozw.: $z_1(t)=e^{At}(u\cos Bt-iw\sin Bt)$, $z_2(t)=e^{At}(w\cos Bt+u\sin Bt)$.

5. Klasyfikacja punktów osobliwych układów liniowych na płaszczyźnie. Postać kanoniczna układu liniowego na płaszczyźnie, punkty osobliwe stabilne i niestabilne, węzeł, ognisko, środek, siodło.

Punkt p o tej własności, że f(p)=0 nazywa się punktem krytycznym/stacjonarnym/osobliwym potoku wyznaczonego przez równanie x'=f(x). Sytuacja najprostrza – dwuwymiarowe ukł lin. o stałych współczynnikach. Rozpatrzmy jednorodne równ. lin. x'=Ax, że stałą macierzą A=(1. a_{11}, a_{12}, 2. a_{21}, a_{22}). Punkt x=0 jest punktem krytycznym równ. x'=Ax. Znajomość pierwiastków wielomianu charakterystycznego pozwala znaleźć bazę p-ni R^2, w której macierz A ma postać kanoniczną.
$x_1(t)=c_1e$^[L_1t], $x_2(t)=c_2e$^[L_2t], $x_2=cx_1$^[$L_2\backslash L_1$].
1) $L_1<L_2<0$ węzeł stabilny (asymptotycznie), w x=0, ściek
2) $L_2<L_1<0$ węzeł stabilny (asymptotycznie), ściek
3) $L_2>L_1>0$ węzeł niestabilny, siodło
4) $L_1<0<L_2$ węzeł stabilny (asymptotycznie), w x=0
5) $L_1=L_2>0$, $\Delta=0$ (dwa niezależne wektory własne), węzeł gwiaździsty, $L_1<0$, stabilny
6) $L_1=L_2>0$, $\Delta=0$ (dwa niezależne wektory własne) węzeł gwiaździsty, $L_1>0$, niestabilny
7) jeden wektor własny:
- węzeł stabilny, ściek, $L_1<0$
- węzeł niestabilny, źródło, $L_1>0$
9) dwie sprzężone wartości wł. Zespolone A=(1. A, -B, 2. B, A):
- A>0, źródło, ognisko niestabilne
- A<0, ściek, ognisko stabilne
- A=0, centrum, punkt stabilny (nie - asymtoptycznie)
10) $L_1\neq 0$, $L_2=0$:
- $L_1<0$ wszystkie punkty stabilne, ale nie asymtotycznie, wszystkie punkty osi Ox_2 są punktami krytycznymi,
- $L_1>0$, wszystkie niestabilne.
Punkt równowagi nazywamy stabilnym wtw., gdy $\forall e>0\exists\delta>0:\ x_0<\delta \Rightarrow x(t,x_0)<e\ \forall t\geq 0$. Punkt równowagi $0\in R^n$ nazywamy niestabilnym wtw., gdy nie jest stabilny.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. Model doświadczenia losowego. Aksjomaty teorii prawdopodobieństwa. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo geometryczne. Paradoksy w teorii prawdopodobieństwa.

Matematyczny model doświadczenia losowego to trójka (Ω,F,P), gdzie P jest przeliczalnie addytywną i nieujemną miara unormowana, określoną na pewnym σ-ciele podz. Zb. zdarzeń elementarnych Ω. Trójkę tę nazywamy p-nią probabilistyczną.
Zdarzenia – podzbiory Ω należące do F.
Klasa zdarzeń F powinna spełniać następujące warunki: $F\neq\emptyset$; jeśli $A\in F$, to $A'\in F$; jeśli $A_i\in F$ dla i=1,2,..., to $U_{i=1}{}^{oo} A_i\in F$ oraz być σ–ciałem podzb. Zb. Ω.
P-stwo – dowolna f. P, określona na σ-ciele zd. $F\subset 2^{\sigma}$, spełniająca warunki: nieujemne wartości, $P(\Omega)=1$, przeliczalna addytywność p-stwa (p-stwo sumy=sumie p-stw w przypadku zdarzeń wykluczających się) – Kołmogorow, 1933 (aksjomaty teorii p-stwa).
Tw. Jeśli (Ω,F,P) jest p-nią probabilistyczną i $A,B,A_1,...,A_n\in F$, to:
$P(\emptyset)=0$; skończona addytywność dla zb. parami rozłącznych $(P(U_{i=1}{}^nA_i)=\Sigma P(A_i)$; $P(A')=1-P(A)$; $A\subset B\Rightarrow P(B\backslash A)=P(B)-P(A)$ oraz $P(A)\leq P(B)$; $P(A)\leq 1$; $P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
Wzór włączeń i wyłączeń:
$P(A_1U...UA_n)=\Sigma P(A_i)-\ \Sigma P(A_i\cap A_j)+...+(-1)^{n+1}P(A_i\cap...\cap A_n)$
Tw. Jeśli $\Omega=\{w_1,w_2,...\}$, dla każdego i zb. $\{wi\}\in F$, P jest p-stwem, to $\forall A\subset\Omega$ mamy $P(A)=\ \Sigma p_i$, gdzie $p_i=P(\{w_i\})$.
Z ww. Tw. Wynika, że $\forall A\subset\Omega$ (A - skończony zb. Ω jednakowo prawdopodobnych zd. elementarnych: $P(A)=\#A/\#\Omega$ - klasyczna def. P-stwa. Taki model pasuje do wielu zad., gdzie wystepują karty, symetryczne kostki i monety, losy na loterię itp.
P-stwo geometryczne – często Ω jest podzb. R^n, na kótrym istnieje naturalna miara (np. miara Lebesgue'a lub miara na sferze niezmiennicza ze wzgl. na obroty), przy czym Ω ma miarę

skończoną. Rozw. zad. Sprowadza się do znalezienie miary (pola, obj.) podbzb. R^n (zad. Typu: z przedziału [0,1] wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki – jaka jest szansa, że z tych odcinków da się skonstruowac trójkąt.
Paradoks Bertranda – ilustracja faktu, że rozw. problemu następuje dopiero po wybraniu p-ni probabilistycznej. Jednak sam RP nie rozstrzyga, jaką p-ń probabilistyczną (model doświadczenia) należy wybrać, pozwala jedynie oblicząć p-stwa pewnych zdarzeń, jeśli znane są p-stwa innych zdarzeń. Paradoks: Na okręgu o promieniu 1 skonstruowano losowo cięciwę AB. Jaka jest szansa, że cięciwa będzie dłuższa, niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg? Do rozw. tego problemu można zastosować 3 różne podejścia – wszystkie poprawne z formalnego punktu widzenia, ale każda prowadzi do sprzecznych rezultatów z dwoma pozostałymi (1/2 – patrzymy na odl. Środka cięciwy od środka okręgu, 1/3 – na kąt środkowy oparty na cięciwie, ¼ - bierzemy pod uwagę kierunek promienia).

2. Prawdopodobieństwo warunkowe. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa. Przykłady zastosowań obu wzorów.

P-stwem warunkowym zajścia zd. A pod warunkiem zajścia zd. B, gdzie $P(B)>0$, nazywamy l. $P(A|B)=P(A\cap B)\backslash P(B)$.
Wzór na p-stwo całkowite pozwala obliczać p-stwa zd., które moga zajść w wyniku ralizacji innych zd., np. w doświadczeniach wieloetapowych. Jeżeli $\{B_1,\dots,B_n\}$ jest rozbiciem Ω na zd. O doatnim p-stwie, to dla dowolnego zd. A $P(A)=\sum P(A|B_i)P(B_i)$ (prawdziwe też dla przeliczalnej l. zd.), np. w urnie jest b kul białych i c czarnych. Jaka jest szansa wyciągnięcia za drugim razem kuli białej (losowanie bez zwracania).
Rozbicie p-ni Ω - rodzina zdarzeń $\{H_i\}_{i\in I}$, które wzajemnie się wykluczają, zaś ich suma jest równa Ω.
Wz. Bayesa – gdy znamy wynik doświadczenia i pytamyo jego przebieg. Jeśli $\{H_i\}_{i\in I}$ jest przeliczalnym rozbiciem Ω na zd. O doatnim p-stwie i $P(A)>0$, to dla dowolnego $j\in I$ mamy $P(H_j|A)=[P(A|H_j)P(H_j)]\backslash[\sum P(A|H_i)P(H_i)]$, np. w zb. 100 monet jedna ma po obu stronach orły, pozostałe są prawidłowe. W wyniku 10 rzutów losowo wybraną monetą otrzymaliśmy 10 orłów. Obliczyć p-stwo, że była to moneta z orłami po obu str.

3. Niezależność zdarzeń i zmiennych losowych. Model probabilistyczny dla ciągu niezależnych doświadczeń. Schemat Bernoulliego i twierdzenie Poissona.

Zd. A i B nazywamy niezależnymi, gdy $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. Relacja niezależności jest relacją symetryczną.
Zd. A1,...,An nazywamy niezależnymi, gdy $P(A_{i1}\cap\dots\cap A_{ik})=P(A_{i1})\dots P(A_{ik})$ dla $1\le i_1<\dots<i_k\le n$, $k=2,\dots,n$. Z niezależności zd. Parami, nie wynika ich niezależność!
Jeżeli zd. Są niezależne to branie zd. Przeciwnego nie zmienia tego faktu. Dla zm. niezależnych wystarczy spr. Jeden warunek (biorąc wszystki n zm. los. Naraz).
Zm. los. $X_1,\dots,X_n$ o wartościach w R , określone na (Ω,F,P) nazywamy niezależnymi, gdy $\forall$ciągu zb. borelowskich B1,...,Bn zachodzi równość $P(X_1\in B_1,\dots,X_n\in B_n)=P(X_1\in B_1)\dots P(X_n\in B_n)$.
Model prob-ny dla ciągu niezależnych dośw.: Jak wygląda p-ń probabilistyczna dla n dośw. wykonywanych niezależnie, gdzie z j-tym dośw. związana jest p-ń prob-na (Ω_j,F_j,P_j)? Wynikiem n doświadczeń będzie ciąg $(w_1,\dots,w_n)$, gdzie w_j jest wynikiem j-tego dośw.. Zatem $\Omega=\Omega_1 x\dots x\Omega_n$. Jasne, że $F=F_1\otimes\dots\otimes F_n$. P-stwo powinno być t. że p-stwo zajścia zdarzenia $A_j\in F_j$ jesr równe $P_j(A_j)$ tzn. $P(A_1 x\dots xA_n)=P(A_1 x\Omega_2 x\dots x\Omega_n)x\dots xP(\Omega_1 x\dots xA_n)= P_1(A_1)\dots P_n(A_n)$. Jak wiadomo z AM istnieje dokładnie jedno takie p-stwo – jest ono produktem miar $P_1,\dots,P_n$ tzn. $P=P_1\otimes\dots\otimes P_n$.
Ważnym przykładem ww. Sytuacju jest sch. Bern. Nazywamy tak ciąg niezależnych powtórzeń tego samego dośw. O dwu możliwych wynikach (sukces/porażka). Poszczególne dośw. Nazywamy próbami Bernoulliego. P-stwo zajścia dokładnie k sukcesów w sch. B. N prób z p-stwem sukcesu w poj. Próbue p wynosi $({}^n{}_k)p^k(1-p)^{n-k}=P(A_k)=\sum P((a_1,\dots,a_n))$ (gdzie $a_1+\dots+a_n=k$).
Jeśli l. dośw. W sch. B. Jest duża, obliczanie p-stwa danej l. sukcesów jest kłopotliwe. Klasyczne tw. Poissona (1837) dostarcza prostego przybliżenia, tkóre ma rozsądną dokładność w przypadku, gdy p-stwo sukcesu p jest małe, a iloczyn np-umiarkowany: Jeśli n->oo, p_n->0, np_n->L>0 to $({}^n{}_k)p_n{}^k(1-p_n)^{n-k}$->(przy n->oo)$L^k\backslash k\ e^{-L}$.

4. Zmienne losowe i rozkłady prawdopodobieństwa. Dystrybuanty, gęstości. Typy rozkładów (dyskretne, ciągłe). Parametry rozkładów (wartość oczekiwana i wariancja).

Odwz. X: Ω->R^n nazywamy zm. losową o wartościach w R^n, jeśli $\forall A\in B(R^n)$ (σ-ciało borelowskich podzb. P-ni metrycznej E, tu R^n) zb. $X^{-1}(A)\in F$. In.: X jest zm. los., jeśli jest odwz. Mierzalnym (Ω,F) w $(R^n,B(R^n))$.
Jeśli odwz. X: Ω->R^n spełnia następujący warunek: $\forall$układu liczb $t_1,\dots,t_n\in R$, zb. $X^{-1}((-oo,t_1]x\dots x(-oo,t_n])$ należy do F, to X jest wektorem los., czyli zm. los. O wartościach w R^n.
F(X) (gdzie X - zm. los., F->R^n->R^m – f. borelowska /przeciwobrazy zb. borelowskich w R^m są zb. borelowskimi w R^n/) jest zm. los. O wartościach w R^m.
Rozkład p-stwa na R^n – każda miara prob-na u na $B(R^n)$.
Rozkład p-stwa zm. los. X o wartościach w R^n - rozkład p-stwa ux, określony na $B(R^n)$ zaleznością $u_x(B)=P(X^{-1}(B))$, $B\in B(R^n)$.
Jeśli u jest rozkładem p-stwa na R^n i dla pewnej f. f:R^n->R całkowalnej w sensie Lebesgue'a mamy $u(A)=\int f(x)dx$, AB(Rn), to f nazywamy gęstością rozkładu u.
Podstawowe wł. Gęstości f rozkładu p-stwa u na R^n: $\int_{Rn}f(x)dx=u(R^n)=1$; $f\ge0$p.w.; gęstość jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zb. miary Lebesgue'a zero. (każda f.f:R^n->R spełniająca warunki 1 i 2 jest gęstością).
Rozkład ciągły – rozkład, który ma gęstość.
Rozkład u na R^n nazywamy dyskretnym, jeśli istnieje zb. przeliczalny $S\subset R^n$, dla którego $u(S)=1$ – wystarczy podać zb. S i miary przypisane jego jednopunktowym podzb.
Dystrybuantą rozkładu p-stwa u na R^n nazywamy f. F_u: R^n->R określoną zależnością $F_u(t_1,\dots,t_n)=u((-oo,t_1]x\dots x(-oo,t_n])$.
Dystrybuanta jednoznacznie wyznacza rozkład i jest obiektem prostszym do badania niż rozkład.
Własności dystrybuanty F_u rozkładu p-stwa u na R: F_u jest niemalejąca, lim $F_u(t)$=1(przy t->oo) i 0(przy t->-oo); F_u jest prawostronnie ciągła. Jeśli f. F:R->R spełnia warunki 1,2,3 to jes tdystrybuantą pewnego rozkładu.
Jeśli istnieje gęstość g rozkładu u na R, to $F_u(t)=\int_{-oo}{}^t g(x)dx$.
Jeśli F jest dystrybuantą, F' istnieje p.w. oraz $\int_{-oo}{}^{+oo}F'(s)ds=1$, to F' jest gęstością rozkładu o dystrybuancie F.
Prametry rozkładów:
i) Powiemy, że zm. los. X o wartościach w R ma wartość czekiwaną (średnią), jeżeli jest całkowalana ($\int_\Omega|X|dP$<oo). Wtedy wartością śr. Zm. los. X nazwiemy l. $EX=\int_\Omega XdP$. Wpp. mówimy, że zm. los. Nie ma wartości średniej.
Jeżeli X ma rozkłąd dyskretny irzpyjmuje skończenie wiele wartości to $EX=\sum_{i\in I}P(X=x_i)$.
Wartością śr. Zm. los. $X=(X_1,\dots,X_n)$ o wartościach w R^n nazywamy wektor $EX=(EX_1,\dots,EX_n)$, o ile wszystkie współ. Mają wartość śr. Własności: $X\ge0$=>$EX\ge0$, liniowość ($E(aX+bY)= aEX+bEY$).
Niech F:R^n->R – f. borelowska, a X –zm. los. o wartościach w R^n ma rozkład ciągły o gęstści g, a f. F:R^n->R jest borelowska, to $EF(X)= \int_{Rn}F(X)g(x)dx$; całkowalność jednej z stron, implikuje całkowalność drugiej i równość całek.
Jeśli zm. los. X ma rozkłąd dyskretny$\{(x_i,p_i)_{i\in I}\}$, to wartość ocz. istnieje wtw. Gdy zbieżny jest $\sum_{i\in I}|F(x_i)|p_i$, i wyraża się wzorem $EF(X)= \sum_{i\in I}F(x_i)p_i$.
Jeśli $X\ge0$, to $EX= \int_0{}^{oo}(1-F_X(t))dt=\int_0{}^{oo}P(X>t)dt$; istnienie jednej str. Implikuje istnienie drugiej i ich równość.
(ii) Jeśli $E(X-EX)^2$<oo, to tę l. nazywamy wariancją zm. los. X o wartościach rzeczywistych ($VarX=EX^2-(EX)^2$). Jest ona miarą rozrzutu rozkładu wokół wartości średniej. Własności: $VarX\ge0$; $Var(X+a)=VarX$; $VarX=0\Leftrightarrow$ gdy zm. jest stała z p-stwem 1; jeśli zm. los. $X_1,\dots,X_n$ mają wariancję i są parami nieskorelowane to $Var(X_1+\dots X_n)=\sum VarX_i$.
3) Kowariancją całkowalnych zm. los. X i Y spełniających warunek E|XY|<oo, nazywamy wielkość $Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]=E(XY)-EXEY$.
4) moment - $E(X-a)^r$.
5) warunkowa wartość oczekiwana – Niech $F\subset M$ będzie σ-ciałem, a X. – zm. los. Całkowalną. WWO X pod warunkeim F nazywamy zm. los. E(X|F) spełniającą warunki: E(X|F) jest F-mierzalna; $\forall A\in F$ $\int_A XdP=\int_A E(X|F)dP$. Istnieje ona dla dowolnego σ-ciała F i całkowalnej zm. los. X, jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zd. o p-stwie zero.

5. Ważniejsze rozkłady prawdopodobieństwa (Bernoulliego, Poissona, wykładniczy, gaussowski). Przykłady zagadnień, w których pojawiają się poszczególne rozkłady.

Rozkłady dyskretne:

i) jednopunktowy – jesli $P(X=a)=1$, to zm. los. X ma ten rozkład (ozn. Delta Diraca δ_a). Parametr: $a\in R$, momenty: $EX=a$, $VarX=0$.
ii) dwupunktowy – jeśli $P(X=a)=p$ i $P(X=b)=1-p=q$. Pojawia się przy opisie dośw. Los. O dwu możliwych wynikach, z którymi możemy skojarzyć wartości liczbowe. $A,b\in R$, $EX=pa+qb$, $VarX=pq(a-b)^2$.
iii) Bernoulliego (dwumianowy) – jeśli $P(X=k)=B(k,n,p)= ({}^n{}_k)p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,...,n$, ozn. $B(n,p)$. Rozkład łącznej l. sukcesów w n dośw. Bernoulliego, gdy szansa sukcesu w poj. Dośw. Wynosi p. In: Rozkład sumy $X_1+...X_n$, gdzie zm. los. X_i są niezależne i mają ten sam rozkład dwupunktowy $P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$. $n\in N$, $p\in[0,1]$, $EX=np$, $VarX=npq$.
iv) Poissona – jeśli $P(X=k)=L^k/k!\ e^{-L}$, $k=0,1,...$, ozn. Pois(L). Rozkład graniczny dla ciągu rozkładów Bernoulliego $B(n,p_n)$, gdy $n\to oo, p_n\to 0, np_n\to L$. Czasem nazywa się go rozkładem zd. rzadkich albo prawem małych liczb (pożary, wypadki, główne nagrody w grach losowych). $L\in(0,oo)$, $EX=L=VarX$.
v) geometryczny – jeśli $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$, $k=1,2,...$ Rozkład czasu oczekiwania na 1-szy sukces w ciągu dośw. Bernoulliego. L. doświadczeń wykonanych przed otrzymaniem 1- sukcesu $P(Y=k)=(1-p)^kp$ ($Ey=EX-1$, $VarY=VarX$). Ma własność braku pamięci ($P(X>t+s|X>t)=P(X>s)$); jego ciągłym odpowiednikiem jest r. Wykładniczy, $p\in(0,1)$, $EX=1/p$, $VarX=(1-p)/p^2$.
vi) wielomianiowy (uogólnienie r. Dwumianowego, opisuje rozkład wyników przy n-krotnym powtórzeniu dośw. O k możliwych rezultatach), hipergeometryczny
Rozkłady ciągłe:
i) jednostajny – $U[a,b]$ $g(x)=1/(b-a)\ 1|_{[a,b]}(x)$, $x\in R$. Intuicja los. wyboru punktu ze zb. A (tu $A=[a,b]$), gdzie A – borelowski podzb. R^n o skończonej i dodatniej mierze Lebesgue'a, też np. rozkład jednostajny na sferze/brzegu kwadratu. $EX=(a+b)/2$, $VarX=(b-1)^2/12$.
ii) wykładniczy – $g(x)=Le^{-Lx}1|_{(0,oo)}(x)$; wł. Braku pamięci. $L\in(0,oo)$, $EX=1\backslash L$, $VarX=1\backslash L^2$.
iii) normalny (Gaussa) – $F(X)=1/\surd(2\pi)\ e\hat{}[-\ x^2/2]$. Jeśli zm. los. $X\sim N(0,1)$, to zm. los. $\sigma X+m\sim N(m,\sigma^2)$, o gęstości $G(X)= 1/[\sigma\surd(2\pi)]\ e\hat{}[-(x-m)^2/2\sigma^2]$. $m\in R$, $\sigma(0,oo)$, $EX=m$, $VarX=\sigma^2$.
wielowymiarowy przypadek:
$X=(X_1,...,X_n)$ ma gęstość $g(x_1,...,x_n)=1/\surd(2\pi)^n e\hat{}[-1/2\ \ \Sigma x_i^2]$, $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$; tu $N(0,1)$. $X\sim N(m,Q)$, m - wektor wartości śr., Q – macierz odwrotna do macierzy kowariancji. Ogólnie $g(x_1,...,x_n)=1/[\surd(2\pi)^n\surd detQ\ e\hat{}[-1/2\ (X-m)^T(Q)^{-1}(X-m)]$.
$\chi^2(n)$ (o n st. swobody) – rozkład zm. los. $X_1^2+...+X_n^2$, gdzie X_i – są niezależnymi zm. los. o rozkładzie $N(0,1)$.
iv) gamma (rozkład sumy - o ile $a\in N$ - niezależnych zm. los. o rozkładzie wykładniczym z parametrem b), beta.

6. Twierdzenia graniczne: prawa wielkich liczb, twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a i centralne twierdzenie graniczne. Przykłady zastosowań.

Wszystkie dotyczą asypmtotycznego zachowania się wyrażeń postaci $[X_1+...+X_n-a_n]\backslash b_n$, gdzie X_n – ciąg niezależnych zm. los., (a_n), (b_n) – ciągi liczbowe.
Słabe prawo wielkich liczb – Niech (X_n) będzie ciągiem parami nieskorelowanych zm. los. całkowalnych z kwadratem o wspólnie ogr. war. Wówczas $[X_1+...X_n]\backslash n-[EX_1+...EX_n]\backslash n\to 0$ (wg p-stwa).
Mocne prawo wielkich liczb – Zał. że $X_1, X_2,...$ są i.i.d: jeśli $X_i\in L^1$, to $[X_1+...+X_n]\backslash n\to EX1$ (p.n., $n\to oo$); jeśli $E|X_1|=oo$, to $P(\lim_{n\to oo}\sup|[X_1+...X_n]\backslash n|=oo)=1$.
Tw. De Moivre'a Laplace'a – Zał. że $X_n\sim B(n,p)$ wówczas $[X_n-np]\backslash\surd[np(1-p)]\Rightarrow N(0,1)$.
Centralne Tw. Graniczne – zał. że $X_1, X_2,...$ są niezależnymi zm. los. całkowalnymi z kwadratem. Ozn. $m_n=EX_n$, $\sigma_n^2=VarX_n$, $b_n^2=\Sigma\sigma_k^2$. Jeżeli jest spełniony warunek Lindeberga to $[X_1+...+X_n-(m_1+...m_n)]\backslash b_n\Rightarrow N(0,1)$.
War. L.: $1/b_n^2\Sigma E|X_k-m_k|^2 1|\{X_k-m_k|>eb_n\}\to 0$ ($\forall e>0$, $n\to oo$).
Warunek Lindeberga jest spełniony np. gdy zmienne $X_1, X_2,...$ są niezależne, o tym samym rozkładzie i dodatniej wariancji.
MPWL jest b. Ważne z punktu widzenia zastosowań:
- weryfikacja wyboru p-ni prob-nej opisującej zjawisko
- metoda Monte Carlo obliczania całek (głównie wielokrotnych)
- w statystyce - dystrybuanta empiryczna itd.
- w dowodach pewnych tw. z teorii liczb
- a AM przy znajdowaniu granic całek (wielokrotnych)
Tw. De M.-L. daje oszczacowanie p-stwa, że l. sukcesów zawiera sięw danym przedziale.

WSTĘP DO INFORMATYKI

1. Problem algorytmiczny i jego rozwiązanie. Przykłady.

Pr. Alg. Polega na scharakteryzowaniu wsystkich poprawnych danych wejściowych i oczekiwanych wyników jako funkcji danych wejściowych. Rozwiązanie algorytmiczne polega na podaniu algorytmu tzn. Takiego opisu działań przy pomocy operacji elementarnych, który zastosowany do poprawnych danych wejściowych daje oczekiwane wyniki, np. Alg. Euklidesa (NWD), sortowanie liczb (przez wkładanie, scalanie, kopcowanie), wieże Hanoi, Wyszukiwanie słowa w słowniku,znajdowanie max. W tablicy).

2. Funkcje i procedury rekurencyjne. Przykłady.

Procedury – mniejsze moduły programu, zwięszkają jego czytelność, wykonują poszczególne fragmenty zad. I mają bardziej przejrzystną formę. Zmienne: lokalne (deklarowane w procedurze), globalne. np. Rekurencyjne (silnia, ciąg Fibonacciego).

3. Metoda programowania "dziel i rządź". Zastosowania.

Polega na rozw. Więskzego problemu, poprzez podzeielnie go na mniejsze podproblemy, dla których znajdujemy rozw., a następnie za ich pomocą znajdujmey rozw. Całego problemu. Kroki: dziel problem na mniejsze podproblemy; rozw. Podproblemy rekurenycjnie, jeśli są one dostatecznie małe to – bezpośrednio; poącz rozw. Podproblemów w rozw. Całego problemu.
Np. Sortowanie prez scalanie (złożoność $O(nln\ n)$.

4. Sposoby reprezentacji grafu, przeszukiwanie grafu wszerz i w głąb. Zastosowania.

Graf zorientowany/nie- - para uporządkowana (V,E) t. że V jest skończyonym zb. wierzchołków, a E – zb. krawędzi:
- podzb. VxV /- par nieuporządkowanych z V.
Sposoby reprzentacji: macierze i listy incydencji. Zastosowania: sieci połączeń drogowych, komputer., tel., łańcuchy żywieniowe.
Wszerz (BFS): Dane wejściowe: $G=(V,E)$, $s\in V$; wynik tablice d[v] (dł. Najkrótszej ścizki z s do v), P[v] (poprzednik v na najkrótszej ścieżce z s do v).
i) inicjalizacja – nadaje wartości początkowe tabliocom d i P
ii) pętla główna (while) – wykonywana dopóki są jeszcze wierzchołki odkryte, które mają nieodkryte następniki (szare).
iii) pętla wew. – przegląda wzsystkich sąsiadów pierwszego wierzchołka z kolejki i odwiedza (maluje na szaro) te wierzchołki, które jeszcze nie były odwiedzone (białe).
Wgłąb (DFS): dane wejściowe $G=(V,E)$, wynik: tablice P[v]=u (v odkryty w czasie przeszukiwania listy incydencji wierzchołka u), d[v] (czas odkrycia v – malowanie na szaro), f[v] (czas opuszcenia v – na czarno).
W DFS wkładamy odwiedzane wierzchołki na stos a nie do kolejki (BFS), otrzymujemy las przeszukiwania w głąb (a nie drzewo – wszerz). Kroki:
i) jw.
ii) pętla przegląda wszystkie wierzchołki G, dla białych woła procedurę DFS-odwiedz (odwiedza u, wszystkich jego sąsiadów iwszystkich sąsiadów sąsiadów - białych)
iii) pętla for przegląda wszystkich sąsiadów iwerzchołka u, dla tych, ktore jeszcze nie były odwiedzone woła rekurenycjnie siebie samą.

5. Złożoność obliczeniowa algorytmu.
6. Co wiesz o hipotezie PNP?

Problemy decyzyjne: łatwo obliczalne – szukanie słowa w słowniku ($o(\ln n)$), min. W tablicy $o(n)$, sortowanie ($o(nlnn)$), pierwszość liczb ($o(n^{12})$). Są to problemy wielomianowe, uwaza się, że tylko takie są efektywnie obliczalne na komputerach. Algorytmy weryfikujące, metody przybliżone. Problemy nierozstrzygalne: problem stopu – konstrukcja f. STOP działająca na parach ciągów znaków sprawdzająca czy pierwszy ciąg zastosowany do drugiego jako procedura zatrzymuje się czy nie.

7. Reprezentacja i arytmetyka liczb rzeczywistych w komputerze.

Systemy liczbowe o różnych podstawach: dziesiętny, dwójkowy, szesnastkowy.
Reprezentacja zmiennopozycyjna: $x=m10^c$, gdzie $0.1\leq|m|\leq1$, (mantysa), c – l. całkowita (cecha). Mantysa i cecha są pamiętane w komputerze w postaci stałopozycyjnej dziesiętnej. L. cyft mantysy decyduje o precyzji licz pamiętanych w komputerze. Błąd bezwzględny, względny. Arytmetyka zmiennopozycyjna (mnożenie/dzielenie mantys, dodawanie/odejmowanie cech itd., dodawanie/ odejmowanie – wyrównanie cech).

MATEMATYKA OBLICZENIOWA

1. Numeryczne rozkłady macierzy: trójkątno-trójkątny (LU) i ortogonalno-trójkątny (QR). Zastosowania do rozwiązywania układów równań algebraicznych liniowych. Koszt, własności numeryczne.

Układ n równań liniowych z n niewiadomymi, Ax=b:
1) LU – iloczyn macierzy trójkątnej dolnej L i trójkątnej górnej U, A=LU, rozwiązanie układu dzieli się na dwa etapy Lz=b, Ux=z. Równość A=LU nie określa czynników L i U jednoznacznie. Algorytmy: Dolittle'a, Crouta, Cholesky'ego ($U=L^T$). Jeśli wszystkie minory główne macierzy kwadratowej A są nieosobliwe, to ma ona rozkład LU.
2) QR – algorytm ten rozkłada macierz na czynniki Q (unitarna st. m) i R (trójkątna górna st. mxn) + elementy przekątniowe R – nieujemne. Metoda Householdera (rozkład ortogonalny), A=QR (A – st. Mxn). Aby zmniejszyć kosztu obliczeń iteracyjnych, poprzedzamy je sprowadzeniem macierzy A do unitarnie podobnej macierzy górnej Hessenberga – nie znikają co najwyżej el-ty leżące nad przekątną, na nie lub tuż pod nią). Wolnązbieżność podstawowego algorytmu można przyspieszyć, stosując przesunięcia kolejnych macierzy.

2. Normy wektorowe i macierzowe oraz ich własności. Wrażliwość numerycznych rozwiązań układu równań liniowych na zaburzenia danych.

Normy - do badania błędów w zadanich numerycznych dotyczących wektórów.
Normy wektorów – w p-ni wektorowej V norma jest f. ||.|| określoną na V o wartościach w R nieujemnych, o własnościach ||x||>0 (dla $x\neq0$), ||Lx||=|L|||x|| (L z R), nierónośc trójkąta. ||x|| - dł. wektora. Np. Norma euklidesowa ($||x||_2=[(\Sigma x_i^2)^{1/2}]$), norma l_{oo} $||x||_{oo}=\max|x_i|$, l_1 w R^n $||x||_1=\Sigma|x_i|$ (kule odpowiednio: koło/kwadrat/kopnięty kwadrat).
Norma macierzy – spełnia ww. Warunki. Dla ustalonej normy ||.|| wektora indukowana przez nią norma macierzy kwadratowej A st. n Jest określona wzorem $||A||=\sup_{||u||=1}\{||Au||: u\in R^n\}$. np. $||Ax||\leq||A||||x||$. Przykłady: norma spektralna (indukowana przez normę euklid. wektorów: $||A||_2=\sup_{||x||=1}||Ax||_2$.
Zaburzenia: macierzy (A^{-1}, $x=A^{-1}b$, przy zaburzeniu x'=Bb, zaburzenie bezwzględne $||x-x'||\leq||I-BA||||x||$), wektora (b', zamiast b: $||x-x'||\leq||A^{-1}||||b-b'||$. Wskaźnik uwarynkowania macierzy A $H(A)=||A||||A^{-1}||\geq1$. Macierz A o dużym wskażniku H(A) nazywamy źle uwarunkowaną. Dla takich macierzy rozw. Ukł Ax=b może być b. Czułe na małe zmiany wektora b.

3. Metody numerycznego rozwiązywania równań nieliniowych skalarnych. Szybkość i warunki zbieżności tych metod.

Przykłady równań nieliniowych – obliczanie orbiet planet (równanie Keplera x –asinx=b):
Metoda bisekcji (metoda połowienia przedziału, liniowa), jeśli f(a)f(b)<0 (a,b – końce przedziału), to obliczamy c=1/2(a+b) i jeśli np. F(a)f(c)<0 to f ma zero w [a,c], pod b podstawiamy c. Metoda bisekcji daje jedno zero funkcji (nie wszystkie) zawarte w [a,b]. $|r-c_n|\leq2^{-(n+1)}b_0-a_0$. (badanie zmiany znaku przy użyciu sgn, kryteria zakończenia: max. L. kroków, błąd mały, f(c) blisko 0).
Metoda Newtona – szybsza (kwadratowa zb.), jednak nie zawsze zbieżna (stosowana często w kombinacji z inną metodą. Na mocy tw. Taylora $0=f(r)=f(x+h)=f(x)+hf'(x)+o(h^2)$, jeśli h male to $h=-f(x)\backslash f'(x)$. I x+h powinno być dobry przybliżeniem zera. Konstrukcja stycznej do wykresu f w punkcie bliskim r i znalezienie punktu, w który ta styczna przecina oś x. Rekurencyjnie stosowanie wzoru $x_{n+1}=x_n-f(x_n)\backslash f'(x_n)$. Niech r będzie zerem poj. F. F i niech f'' będzie ciągła. Wtedy istnieje takie ot. Punktu r i taka stała C, że jeśli metoda Newtona startuje z tego ot. To kolejne punkty są coraz bliższe r. Wada – obliczanie pochodnej f. f, której zera szukamy.

Metoda siecznych - $x_{n+1}=x_n-f(x_n)[x_n-x_{n-1}]/[f(x_n)-f(x_{n-1})]$ (zb. nadliniowa), dwa punkty początkowe potrzebne.

4. Metody numerycznego rozwiązywania zagadnienia własnego macierzy symetrycznej. Zbieżność i koszt tych metod.

1) QR znajdowania wartości własnych
2) potęgowa – pozwaala obliczyć wartość własną o najwiekszym module i odpowiadający jej wektor wł., działa bez zakłóceń jeśli tylko jedna jej wartość własna ma największy moduł oraz istnieje układ n wektorów własnych liniowo niezależnych. $X^{(k)}=A^kx^{(0)}$, $r_k=g(x^{(k+1)})\backslash g(x^{(k)})\text{->}L_1$ (gdzie g – funkcjonał liniowy, L_1 – wartość wł. O największym module).
3) Aitkena – przyspieszanie zbieżności ciągu $\{r_k\}$ do L_1.
4) odwrotna metoda potęgowa – jeśli L jest wartością wł. Macierzy nieosobliwej A, to L^{-1} jest wartością wł. Macierzy A^{-1}.
5) warianty metody potęgowej związane z macierzą przesuniętą A-uI.

5. Kwadratury interpolacyjne i złożone dla numerycznego całkowania funkcji jednej zmiennej. Zbieżność kwadratur złożonych.

Zastąpienie f. f inną bliską f. g, dla której można całkę obliczyć np. Całka z e^(-x²). Kwadratura $\int f(x)dx\approx\Sigma A_if(x_i)$.
Interpolacja wielomianowa – w przedziale całkowania [a,b] wybieramy węzły $x_0,...,x_n$ i stosujemy wzór interpolacyjny Lagrange'a, $(*)=\int f(x)dx\approx\int p(x)dx=\Sigma f(x_i)\int l_i(x)dx$, gdzie $p(x)= \Sigma f(x_i)l_i(x)$, $l_i(x)=\Pi_{j\neq i}[x-x_j]\backslash[x_i-x_j]$.
- wzór Newtona-Cotesa przy równooddalonych węzłach.
- wzór trapezów $(*)=1\backslash2(b-a)[f(a)+f(b)]$, dokładny gdy f – wielomian st. Co najwyżej 1, błąd - $1\backslash12(b-a)^3f''(l)$, gdzie $l\in(a,b)$.
- złożony wz. Trapezów – stosowanie wz. Trapezów do n podprzedziałów.
- metoda nieoznaczonych współczynników, dokładny gdy f - wielomian st.co najwyżej n,$\int x^jdx=\Sigma A_ix^j$ – rozw. Układu równań.
-wzór Simpsona, dokładny dla wiel. St. Co najwyżej 3 $(*)=1\backslash6(b-a)[f(a)+4f([a+b]\backslash2)+f(b)]$.
- złożony wzór Simpsona – jw.
- kwadratury Gaussa – (*) dokładny dla f – st. Co najwyżej 2n+1 (węzły – zera (n+1)szego wielomianu ortogonalnego), tw. Stieltjesa o zbieżności

6. Interpolacja. Aproksymacja w przestrzeniach unitarnych oraz jednostajna. Zastosowania w matematyce obliczeniowej.

1) Interpolacja wielomianowa – znaleźć wielomian p możliwie najniższego st. T. że dla danych n+1 punktów (x_i,y_i) jest $p(x_i)=y_i$ (interpoluje wartości y_k w węzłach x_k np. f. f).
- Newtona $p_k(x)=\Sigma c_i\Pi(x-x_j)$ – kosztowna metoda, błędy zaokrągleń,
- Lagrange'a $p(x)= \Sigma y_kl_k(x)$, $l_i(x)=\Pi_{j\neq i}[x-x_j]\backslash[x_i-x_j]$.
- szukanie współczynników wielomianu przy potęgach zmiennej (macierz Vandermonde'a, bywa źle uwarunkowana)
- wzór interpolacyjny zawerający ilorazy różnicowe (najbardziej użyteczny) $p(x)= \Sigma f[x_0,,...,x_k]\Pi(x-x_j)$, ilorazy różnicowe spełniają zależność rekurencyjną $f[x_0,...,x_k]=(f[x_1,...,x_k]-f[x_0,...,x_{k-1}])\backslash(x_k-x_0)$.
- interpolacja Hermite'a – węzłami wielokrotnymi (dane wartości i wartości pochodnych)
2) Interpolacja za pomocą f. sklejanych – ustalamy n+1 węzłów $t_0,...,t_n$. Dla danej l. całkowitej nieujemnej k f. sklejaną st. K nazywamy taką f. S która: w każdym z przedziałów $[t_i,t_{i+1}]$ jest wielomianem kl. P_k., ma ciągłą (k-1)-szą pochodną w przedziale $[t_0,t_n]$. Np. st. 0 jest przedziałami stała.
- f. B-sklejane – bazowe f. sklejane t. że każda f. sklejana jest ich kombinacją liniową.
P-ń unitarna – p-ń liniowa, w której określono iloczyn skalarny i w której norma wyraża sięprzez ten iloczyn. Ogólne zad. Optymalnej aproksymacji: Niech E będzie p-nią unormowaną, a G jej podp-nią. Jeśli pewien element $g\in G$ jest t. że $||f-g||=dist(f,G)$ (gdzie $dist(f,G)=\inf_{g\in G}||f-g||$) to g najlepiej aproksymuje dany punkt f – jest punktem optymalnym dla f. W klasycznym zad. Aproksymacji jednostajnej p-nią E jest zb.$\subset$[a,b], norma jest określona $||f||=\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$, a podp-nią G jest zbiór P_n wszystkich wielomianów st. Co najwyżej n. Jeśli G jest podp-nią skończoną p-ni unormowanej E, to $\forall$punktu z E istnieje punkt optymalny w G.