1. Centralne twierdzenia graniczne

- **Intuicja**
  Suma dużej liczby niezaleznych składników o skończonej wariancji, gdzie żaden składnik nie dominuje ma w przyliżeniu rozkład normalny (tłumaczy to też wszechobecność rozkładu $\mathcal{N}$).
- **Schemat serii**
  Tablica zmiennych losowych postaci (X_{n,r_n}), gdzie $r_n \to \infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Zakładamy, że zmienne losowe w każdym wierszu $X_{n,1}, \ldots, X_{n,r_n}$ są niezależne (dla wygody $k_n = n$).
- **Tw. Lindeberga**
  Zał. że dla każdego n, zmienne $X_{n,1}$, $X_{n,2}$, ..., X_{n,r_n} są niezależnymi zm. los. o średniej 0 takimi że $\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}X^2_{n,k} \to^{n\to\infty} 1$. Dodatkowo zał. że jest spełniony war. Lindeberga $\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}X^2_{n,k}1_{\{|X_{n,k}|>\varepsilon\}} \to^{n\to\infty} 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$. Wówczas $X_{n,1} + \ldots + X_{n,r_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
  Dowód:
  $Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}$, $\varphi_{n,k} = varphi_{X_{n,k}}$, $\sigma^2_{n,k} = \mathbb{E}X^2_{n,k}$
  Pokazujemy, że $\varphi_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(t) \to^{n\to\infty} e^{-t^2/2}$
  $|\varphi_{Z_n(t)} - e^{-t^2/2}| = |\prod_{k=1}^{n} \varphi_{n,k}(t)(\text{ czyli } \mathbb{E}e^{itX_{n,k}}) - \prod_{k=1}^{n} e^{-\sigma^2_{n,k}t^2/2}| \le$
  Rozbijamy na dwie sumy i szacujemy z góry przez składniki, które zbiegają do 0 przy $n \to \infty$. (dopisujemy $\mathbb{E}(-itX_{n,k} - 1 + \frac{1}{2}t^2X^2_{n,k}) + 1 - \frac{1}{2}t^2\sigma^2_{n,k} = 0$.
  Korzystamy z nierówności $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n \in \mathbb{C}$ i $|a_i|$, $|b_i| \le 1$ $|a_1 \ldots a_n - b_1 \ldots b_n| \le \sum |a_i - b_i|$.
- **Uogólnione tw. Lindeberga**
  - Zał. że dla każdego n zmienne $X_{n,1}$, ..., X_{n,r_n} są niezależne i całkowalne z kwadratem. Oznaczmy $m_{n,k} = \mathbb{E}X_{n,k}$ i przypuśćmy że $\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}X_{n,k} \to^{n\to\infty} m$, $\sum_{k=1}^{r_n} VarX_{n,k} \to^{n\to\infty} \sigma^2$ oraz $\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}(X_{n,k} - m_{n,k})^2 1_{\{|X_{n,k}-m_{n,k}|>\varepsilon\}} \to 0$. Wówczas $X_{n,1} + \ldots + X_{n,r_n} \Rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
  - Zał. że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależnymi zm. los. całkowalnymi z kwadratem, $m_n := \mathbb{E}X_n$, $\sigma^2_n = VarX_n$, $b^2_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma^2_n$. Jeśli jest spełniony war. Lindeberga $b_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k - m_k|^2 1_{\{|X_k-m_k|>\varepsilon b_k\}} \to^{n\to\infty} 0$, to $\frac{X_1+\ldots+X_n-m_1-\ldots-m_n}{b_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
- **CTG – najprostsza wersja**
  - Niech $X_1, X_2 \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i niech $\mathbb{E}X = 0$, i $D^2X = 1$. Wtedy $\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}} \to_D \mathcal{N}(0, 1)$.
  - Zał. że $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład o dodatniej wariancji. Oznaczmy $m = \mathbb{E}X_1$, $\sigma^2 = VarX_1$. Wówczas war. Lindeberga jest spełniony i $\frac{X_1+\ldots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
- **Tw. Berry-Esseena**
  Dokładnosć przybliżenia w CTG o ile założymy istnienie trzeciego momentu.
- War. Lindeberga nie jest konieczny dla zbieżności rozkładów zmiennych losowych Z_n do $\mathcal{N}(0, 1)$ ($k \to \infty$, $n = 1, 2, \ldots$) np. wszystkie $X_{n,k}$ w schemacie serii mają rozkłady $(0, \sigma^2_{n,k})$. Zał., że pierwsza zm. los. w kolumnie ma rozkład $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ (ten składnik dominuje), a pozostałe mogą mieć równe wariancje, byle ich suma = 1. Wtedy warunek Lindeberga nie jest spełniony, ale $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- **Warunek Lindeberga spełniony jest gdy**
  - $X_1, X_2, \ldots$ są wspólnie ograniczonymi niezależnymi zm. los. spełniającymi war. $\sum_{k=1}^{n} VarX_k \to \infty$.
  - Dla każdego $n, X_{n,1}, \ldots, X_{n,r_n}$ są niezależnymi scentrowanymi i zm. los. spełniającymi warunki $\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}X^2_{n,k} \to^{n\to\infty} 1$ oraz $\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}|X_{n,k}|^{2+\delta} \to^{n\to\infty} 0$ dla pewnego $\delta > 0$ (**Stw. Lapunowa**).
- **Tw. de Moivre'a-Laplcae'a**
  Zał. że X_n ma rozkład Bernoulliego z parametrami n, p. Wówczas $\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
- Centralne tw. graniczne pozwala badać zachowanie dystrybuant sum niezależnych zm. los. Istotnie zbieżność $\frac{X_1+\ldots+X_n-(m_1+\ldots+m_n)}{b_n} \to \mathcal{N}(0, 1)$ jest równoważna zbieżności punktowej dystrybuant: $\mathbb{P}\ (\frac{X_1+\ldots+X_n-(m_1+\ldots+m_n)}{b_n} \le x) \to \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy$.

2. Procesy stochastyczne. Proces Wienera i jego własności

- **Proces Wienera** (ruch Browna)
  Matematyczny model ruchu cząsteczki zawieszonej w cieczy. Formalnie, rodzina zmiennych losowych W_t, $t \geq 0$, okreśonych na tej samej p-ni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- **Funkcja losowa**
  $X = (X_t)_{t \in T}$, gdzie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – przestrzeń probabilistyczna, (E, B) – przestrzeń mierzalna, E – przestrzeń stanów $T \neq \emptyset$ – dowolny zbiór, X_t – zmienna losowa o wartościach wE.
- **Nierozróżnialność**
  Funkcje losowe $X = (X_t)_{t \in T}$, $Y = (Y_t)_{t \in T}$ są nierozróżnialne, jeśli $\mathbb{P}(\exists_{t \in T} X_t \neq Y_t) = 0$.
- **Proces stochastyczny**
  Funkcja losowa o wartościach w E (czyli zwykle $\mathbb{R}$, czas $T = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}_+$, przedział w $\mathbb{R}_+$ lub $\mathbb{Z}_+$, czasem $T = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$) – proces stochastyczny o wartościach w E. Proces X jest: d-wymiarowy, gdy $E = \mathbb{R}^d$; dyskretny, gdy $T \subset \mathbb{Z}_+$; ciągły, gdy $T \subset \mathbb{R}_+$. Oznaczenie: $X_t(\omega) = X(t, \omega)$, $X_t = X(t)$.
  Inaczej: Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie p-nią probabilstyczną, (E, ε) p-nią mierzalną, zaś T jest dowolnym zbiorem. Procesem stochastycznym o wartościach w E, określonym na zbiorze T, nazywamy rodzinę zm. los. $X = (X_t)_{t \in T}$ przyjmujących wartości w zbiorze E.
- **Trajektoria (ścieżka)**
  $\forall \omega \in \Omega$ funkcja $t \mapsto X_t(\omega)$, $T \to E$.
- **Niezależne przyrosty**
  Proces $X = (X_t)_{t \in T}$ (o wartościach w E) ma niezależne przyrosty, jeśli $\forall_{0 \leq t_0 < \ldots < t_n, t_j \in T} X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ są niezależne, gdzie $E = \mathbb{R}^d$, $T = \mathbb{R}_+$ lub przedział.
- **Stacjonarne przyrosty**
  Mówimy, ze proces stochastyczny $(X_t)_{t \geq 0}$ ma przyrosty stacjonarne, jeśli rozkład $X_t - X_s$ zależy tylko od $t - s$, czyli $\forall_{t > s \geq 0} X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0$.
- **Proces Wienera (ruch Browna) [PW]** Proces $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ spełniający:
  - $W_0 = 0$
  - ma niezależne przyrosty
  - $\forall s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$
  - ciągłe trajektorie z p-stwem 1 (tzn. $\exists$ taki zbiór A, że $\mathbb{P}(A) = 1$ oraz $\forall \omega \in A$, $t \to W_t(\omega)$ jest funkcją ciągłą na $[0, \infty)$.
- **Tw.**
  - Proces $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ o wartościach w $\mathbb{R}^d$ jest d-wymiarowym [PW] wtedy i tylko wtedy gdy: $W_0 = 0$, ma niezależne przyrosty, $s < t$, $W_t - W_s$ ma rozkład normalny ze średnią zero i macierzą kowariancji diagonalną z $t - s$ na przekątnej.
  - Proces X_t, $t \geq 0$ jest PW wtw. gdy spełnione są warunki $1, 2, 4$ oraz $\mathbb{E}X_t = 0$, $\mathbb{E}X_t^2 = 1$ oraz jeśli $t \geq s$, to $X_t - X_s \sim X_{t-s}$ (przyrosty stacjonarne) i $\mathbb{E}X_t^4 < \infty$ $\forall t > 0$.
  - Proces $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest [PW] wtw. gdy jest ciągły, gaussowski, $\mathbb{E}X_t = 0$, $Cov(X_t, X_s) = t \wedge s$.
    Dowód
    $\Rightarrow$ łatwo
    $\Leftarrow$ (1) $VarX_0 = 0 = \mathbb{E}X_0$.
    (3) Dla $t > s$ $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, Y)$, $Y = Var(X_t - X_s) = VarX_t + VarX_s - 2Cov(X_t, X_s) = t - s$.
    (2) Ustalmy $0 \leq t_0 \leq \ldots \leq t_n >$ Zauważmy, że wektor $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ ma rozkład gaussowski, więc jego współrzędne są niezależne wtw. gdy są nieskorelowane. Dla $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4$: $Cov(X_{s_1}, X_{s_3} - X_{s_2}) = Cov(X_{s_1}, X_{s_3}) - Cov(X_{s_1} - X_{s_2}) = s_1 - s_1 = 0$. $Cov(X_{s_2} - X_{s_1}, X_{s_4} - X_{s_3}) = Cov(X_{s_2} - X_{s_4} - X_{s_3}) - Cov(X_{s_1}, X_{s_4} - X_{s_3}) = 0$.
- **d-wymiarowy proces Wienera**
  Proces $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ o wartościach w $\mathbb{R}^d$, gdy $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$, $W^{(1)}$, …,$W^{(d)}$ są niezależnymi procesami Wienera.
- **Uwaga**
  Rozkład $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ jest określony przez wartość oczekiwaną 0 oraz macierz kowariancji, taką że $\mathbb{E}(W_t W_s) = s \wedge t$.
  Bo: $Cov(X_s, X_t) = Cov(X_s, X_t - X_s) + VarX_s = s$ dla $t \geq s$ oraz t dla $s \geq t$, czyli $= min\{s, t\}$.
- **Lemat**
  Jeśli $X = (X_t)_{t \in T}$ jest ciągłym procesem z własnością $\forall_{t_1 < \ldots < t_n} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \sim (W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$, gdzie W jest [PW], to X jest [PW].

- **Wniosek**
  Jeśli W jest [PW], to $\forall_{t_1<\ldots<t_n}(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})$ (rozkłady skończenie wymiarowe PW – rozkłady wektorów losowych) ma rozkład normalny.
- **Proces gaussowski**
  $X=(X_t)_{t\in T}$ o wartościach w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}^d$, gdy $\forall_{t_1<\ldots<t_n}(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})$ ma rozkład gaussowski (PW, most Browna $X_t=W_t-tW_1$, $t\in[0,1]$; nie są: W_t^2, $exp(W_t)$.
- **Fakt**
  Niech $W=(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ [PW], ustalmy $0\leq s<t$. Rozważmy ciąg podziałów $[s,t]$ taki że $s=t_0^n<t_1^n<\ldots,t_{m_n}^n=t$, $\max_k(t_{k+1}^n-t_k^n)\longrightarrow_{n\to\infty}0$. Wówczas $\sum_{k=1}^{m_n}(W_{t_k^n}-W_{t_{k-1}^n})\longrightarrow_{n\to\infty}t-s$ w $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.
- **Rozkład skończenie wymiarowy funkcji losowej X**
  Mamy funkcję losową lub $X=(X_t)_{t\in T}$ w E. $\forall_{n\geq1}\forall_{t_1,\ldots,t_n\in T}$. Miara probabilistyczna na $E\times\ldots\times E\to\mu_{t_1,\ldots,t_n}(B)=P((X_{t_1},\ldots,X_{t_n})\in B)\leftarrow$ rozkład skończenie wymiarowy procesu X, $B\in\mathcal{B}^{\otimes n}$.
- **Wniosek**
  PW $(W_t,\mathcal{F}_t)_t$ jest martyngałem.
  Jeśli zdefiniujemy filtrację $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$ zależnością $\mathcal{F}_t=\sigma(W_s:s\leq t)$, to otrzymamy martyngał z czasem ciągłym $W_t,\mathcal{F}_t)$. Martyngały: W_t, W_t^2-t.
- **Tw.**
  Prawie wszystkie trajektorie PW $(W_t)_{t\in[0,1]}$ są funkcjami nigdzie nieróżniczkowalnymi (prawie wszystkie trajektorie mają wahanie skończone).

3. Łańcuchy Markowa, własności

- Macierz $P = [p_{ij}]_{(i,j) \in ExE}$ nazywamy **stochastyczną** (przejścia), jeśli $p_{ij} \in [0, 1,]$ dla wszystkich $i, j \in E$ oraz $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ dla każdego $i \in E$.
- **Intuicja**
  Łańcuch Markowa charakteryzuje się pewną liczbą dopuszczalnych stanów i regułami przechodzenia pomiędzy nimi. Ważne, że szansa znalezienia się w stanie A w chwili n zależy tylko od stanu, w jakim byliśmy w chwili $n-1$ i od reguł przechodzenia.
- Zał. że $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jest p-nią probabilistyczną, E (zbiór przeliczalny, przestrzeń stanów), P są j.w. ustalone. **Łańcuchem Markowa** o wartościach w E i macierzy przejścia P nazywamy ciąg $(X_n)_{n=0,1,...}$ zm. los. (określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej) takich że $\mathbb{P}(X_n = a_n | X_n = a_{n-1}, X_{n-2} = a_{n-2}, \ldots, X_0 = a_0) =$ własność Markowa ciągu zmiennych losowych$\mathbb{P}(X_n = a_n | X_n = a_n)$jednorodny $= p_{a_n a_{n-1}}$ dla wszystkich a_0, a_1, ..., a_n t. że zdarzenie warunkujące ma dodatnie p-stwo (gdy istnieje macierz $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ będąca $\forall n$ jego macierza przejścia w każdym kroku). Równoważnie $\mathbb{P}(X_n = j | X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1}) = p_{X_{n-1} j}$. Liczba p_{ij} jest p-stwem przejśćia ze stanu i do stanu j w jednym kroku np. błądzenie losowe, model dyfuzji cząstek.
- **Błądzenie losowe na prostej**
  Ciąg niezależnych zmiennych losowych $(U_n)_{n=0}^{\infty}$, gdzie dla $n \geq 1$ $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(U_n = -1) = 1 - p$, U_0 – dowolna zmienna losowa o wartościach w E, $X_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$, $n = 1, 2, \ldots$. Ciąg (X_n) tworzy łańcuch Markowa. Intuicyjne jasne, bo $X_n = X_{n-1} + U_n$ (z niezależności), $\mathbb{P}(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-1}, \ldots, X_0 = s_0) = \mathbb{P}(U_n = s_n - s_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(U_n = s_n - s_{n-1}, X_{n-1} = s_{n-1})}{\mathbb{P}(X_{n-1} = s_{n-1})} = \mathbb{P}(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-1})$ (wszystkie stany komunikują się).
- **Rozkład skończenie wymiarowe łańcucha Markowa**
  Rozkłady wektorów $(X_{k_1}, \ldots, X_{k_n})$ spełniające zależność $\mathbb{P}(X_0 = s_0, \ldots, X_n = s_n) = \mathbb{P}(X_0 = s_0) p_{s_0 s_1} \ldots p_{s_{n-1} s_n}$, są więc wyznaczone jednoznacznie przez rozkład początkowy i macierz przejścia.
- **Równanie Chapmana-Kołmogorowa**
  Dla wszystkich $k, n \geq 1$ oraz $i, j \in E$ $p_{ij}^{k+n} = \sum_{i \in E} p_{il}^{k} p_{lj}^{n}$.
- Rozkład zmiennej X_0 nazywamy **rozkładem poczatkowym**. Jest on jednoznacznie wyznaczony przez ciąg $(\pi_i)_{i \in E}$ liczb nieujemnych o sumie 1.
- **Klasyfikacja stanów** Mówimy, ze stan j jest **osiagalny** ze stanu i jeśli $p_{ij}^{(n)} > 0$ dla pewnego $n \geq 1$. Mówimy, że sany i oraz j się **komunikują**, jeśli j jest osiągalny z i oraz i jest osiągalny z j (mamy przechodzniość!). Stan i jest **nieistotny**, jeśli istnieje taki stan j, że j jest osiągalny z i oraz i nie jest osiagalny z j.
  Łancuch Markowa nazywamy **nieprzywiedlnym**, jesli wszystkie stany komunikują się ze sobą.
- **Tw.** Stan j jest **chwilowy** (do takiego stanu wraca się skończenie wiele razy) wtw. gdy $P_j < \infty$. Stan j jest **powracający** (nieskończenie) wtw. gdy $P_j = \infty$.
  $P_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \mathbb{E}(N_j | X_0 = j)$ – średni czas przebywania łańcucha w stanie j.
- **Tw.** Zał. że łańcuch Markowa jest **nieprzywiedlny**. Wówczas jeśli jeden stan jest chwilowy, to wszystkie są chwilowe; jeśli jeden stan jest powracający, to wszystkie sa powracające (inaczej: wszystkie stany są tego samego rodzaju).
- **Zamknięty zbiór stanów** C
  Żaden stan spoza tego zbioru nie da się osiągnąć wychodząc z owolnego stanu w C. Pojedynczy stan s_k tworzący zbiór zamknięty nazywam **stanem pochłaniającym**.
- **Tw.**
  Zbiór stanów łańcucha Markowa można jednoznacznie rozbić na zbiór stanów chwilowych i nieprzywiedlne zamknięte zbiory stanów powracających.
  Każdy stan nieistotny jest chwilowy. Jeśli łańcuch Markowa jest skończony, również każdy stan chwilowy jest nieistotny i oba zbiory stanów są równe.
  Dowód
  Dla stanu powracającego j, $j \in S \backslash T$ niech $\S_j = \{k : k \leftrightarrow j\}$. S_j jest zamkniętym zbiorem stanów zajemnie komunikujących się. $S_k = S_j$, dla $k \in S_j$ oraz $S_k \cap S_j = \emptyset$ dla $k \notin (S_j \cup T) >$ Zatem $S \backslash T$ rozbija się na rozłączne klasy, które możemy ponumerować $S_1, S_2 \ldots$
- Zał. że P jest macierzą stochastyczną. Rozkład π na e nazywamy **stacjonarnym** (niezmienniczym, granicznym), jeśli $\pi P = \pi$ (tzn. dla wszstkich $j' inE$, $\sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} = \pi_j$.
  Własność $\forall n \geq 1$ $\pi P^n = \pi$ ($\sum_{j \in E} \pi_j = 1$, $\forall_j \pi_j \geq 0$).

- **Wniosek**
  Jeżeli łańcuch Markowa jest powracający, to $\forall$ stanu j $\mathbb{P}(\exists n \geq 1 X_n = j) = 1$ niezależnie od rozkładu początkowego X_0.
- **Tw ergodyczne**
  Niech (X_n) będzie nieprzywidlnym, nieokresowym łańcuchem Markowa, dla którego istnieje rozkład stacjonarny π. Wówczas:
  - (X_n) jest łańcuchem powracającym (każdy stan jest powracalny)
  - dla wszystkich $i, j \in E$, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$
  - rozkład stacjonarny jest jedyny (jednoznaczny) i $\pi_j = \frac{1}{\nu_j}$, gdzie ν_j jest średnim czasem powrotu łańcucha do stanu j.
- **Łańcuch ergodyczny**
  Łańcuch Markowa, dla którego istnieją granice z punktu drugiego.
- Jeśli łańcuch Markowa jest nieprzywiedlny, powracający, a wartości oczekiwane czasów powrotu są skończone, to istnieje rozkład stacjonarny.
- **Wniosek z tw. ergodycznego**
  Niech (X_n) będzie łańcuchem ergodycznym, $A \subset S$ i $\nu_A(n)$ oznacza średni czas przebywania łańcuhca Markowa w zbiorze A do momentu n tj. $\nu_A(n) = \frac{1_a(X+0)+\ldots+1_A(X_n)}{n+1}$. Wtedy $\mathbb{E}(\nu_a(n)|X_0 = i) \to^{n\to\infty} \sum_{j\in A} \pi_j$.
  Dowód
  $\mathbb{E}(\nu_A(n)|X_o = i) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}(1_A|X_m)|X_0 = i) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j\in A} p_{ij}(m) = \sum_{j\in A}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} p_{ij}(m) \to \sum_{j\in A}\pi_j$ ponieważ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$.
- **Powyższe tw. ogólniej**
  Niech (X_n) będzie nieprzywiedlnym, nieokresowym łańcuchem Markowa, dla którego istnieje rozkład stacjonarny π. Wtedy $\nu_A(n)$ zdef. powyższym wzorem spełnia zależność $\lim_{n\to\infty}\nu_A(n) = \pi_j$.
- **Przykład**
  P=(0 1, 1 0) – łańcuch okresowy o okresie 2 i $\lim_{n\to\infty} p_{00}(2n) = 1$ i $\lim_{n\to\infty} p_{00}(2n+1) = 0$. Granica nie istnieje, natomiast istnieją granice podciągów.
- Rozpatrzmy ł. M. o k stanach, przy czym stany $1, \ldots, m$ są pochłaniające. Wtedy macierz przejścia P ma postać $P = (I(m)0(k-m), RQ)$.
- Macierz $A = (a_{ij})_{i\in\{1,\ldots,k-m\}, j\in\{1,\ldots,m\}}$, gdzie $a_{ij} = p_{\{j\}}(i+m)$ jest p-stwem, że łańcuch wychodzący ze stanu chwilowego $i+m$ zatrzyma się w stanie pochłaniającym j, spełnia zależność $A = (I-Q)^{-1}R$.
- **Tw.**
  Gdy $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa to:
  - dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ i dowolnych $s_0, \ldots s_n \in S$ $\mathbb{P}(X_1 = s_1, X_2 = s_x, \ldots, X_n = s_n|X_0 = s_0) = \mathbb{P}(X_{m+1} = s_1, X_2 = s_x, \ldots, X_{n+m} = s_n|X_m = s_0) = \mathbb{P}(X_n = s_1|X_0 = s_0)$
  - dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ i dowolnych $s_0, s_1 \in S$ $\mathbb{P}(X_{n+m} = s_1|X_m = s_0) = \mathbb{P}(X_n = s_1|X_0 = s_0)$
  - dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ i dowolnych $i_0, \ldots i_m, j_0 \ldots, j_n \in S$ $\mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_m = i_m, X_{m+1} = j_1, \ldots, X_{m+n} = j_n|X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_m = i_m|X_0 = i_0)\mathbb{P}(X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n|X_0 = i_m)$.
- **Okresem stanu** j nazywamy największą taką liczbę n, że powrót do stanu j jest możliwy tylko po liczbie kroków podzielnej przez n: $o(j) = NWD\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}$. Stan nazywamy **okresowym** jeśli $o(j) > 1$ i nieokresowym, jeśli $o(j) = 1$.
- **Stw.**
  W nieprzywiedlnym ł.M. wszystkie stany mają ten sam okres.
  Dowód
  Weźmy 2 dowolne stany i, j, $i \leftrightarrow j$, $d_i = o(i)$, $d_j = o(j)$. Istnieją l, m takie że $p_{ij}(l) > 0$, $p_{ji}(m) > 0$. Niech n takie że $p_{ij}(n) > 0$. Wtedy $p_{ii}(l+m+n) \geq p_{ij}(l)p_{jj}(n)p_{ji}(m) > 0$. Zatem d_i dzieli $l+m+n$. Także $p_{ii}(l+m) > 0$, wiec d_i dzieli $l+m$, stąd d_i dziel n. Zatem $d_i \leq d_j = NWD\{n : p_{jj}(n) > 0\}$. Analogicznie $d_i \geq d_j \Rightarrow d_i = d_j$.
- Nieprzwiedlny łańcuch Markowa (X_n) nazywamy **okresowym**, jeśli wszystkie jego stany mają okres większy niż 1. W przeciwnym razie łańuch nazywamy nieokresowym.

4. Modele populacji i oddziaływań między populacjami (model Malthusa, model Verhulsta - równanie logistyczne, model Lotki-Volterry...)

- Modelowanie pojedynczej populacji – model Malthusa
  - koniec XVIII w. – praca o szybkim przyroście liczebności populacji ludzkiej („liczba ludności wzrasta w tempie geometrycznym, zasoby żywności w tempie arytmetycznym)
  - opis heurystyczny: jednorodna populacja (osobniki są identyczne), osobnik rodzi się zdolny do rozrodu w dowolnym wieku (momenty rozmanżania są rozłożone jednostajnie w dowolnym przedizale czasu), osobnik nie umiera, każdorazowo osobnik ma λ osobników potomnych, wydaje je na świat co τ jednostek czasu.
  - rozrodczość: $N(t+\Delta t) - N(t) = \Delta t/\tau \lambda N(t)$, czyli $\dot{N}(t) = \frac{\lambda}{\tau} N(t) = rN(t)$ (r – współczynnik rozrodzczości) – model ciągły ($N(t) = N_0 e^{rt}$), $N(t+\Delta t) = N(t)(\Delta tr + 1) \Rightarrow N_{t+1} = N_t(r+1)$ – model dyskretny (rozwiązanie $N_t = N_0(1+r)^t$
  - rozrodczość i śmiertelność: jak wyżej, tylko r oznacza rozrodczość - śmiertelność, jeśli > 0 to liczebność poulacji rośnie, jeśli < 0, to zbiega do 0
  - model z migracjami $\dot{N}(t) = r_n N(t) + m$ (wprowadzenie nowych osobników do siedliska jeśli $m > 0$, odławienie, gdy $m < 0$).
- Modelowanie pojedynczej populacji – model Verhulsta (logistyczny)
  - heurystycznie: konkurencja wewnątrzgatunkowa o zasoby siedliska
  - $\dot{N}(t) = rN(t) - aN^2(t) = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K})$, gdzie $K = r/a$ – pojemność środowiska, a – współczynnik konkurencji wenątrzgatunkowej
  - ważne do pokazania – istnienie i jednoznaczność rozwiązań (prawa strona C^1), nieujemność (dla $N_0 \geq 0$, $N(t) \geq 0$ dla $t > 0$), istnienie dla wszystkich $t \geq 0$ ($\dot{N}(t) \leq rN(t) \Rightarrow N(t) \leq N_0 e^{rt}$, wzrost co najwyżej wykładniczy, monotoniczność rozwiązań, krzywa logistyczna
  - dyskretne równanie logistyczne $N_{t+1} = (1+r)N_t - \frac{r}{K}N_t^2 = \tilde{r}N_t(1 - \frac{N_t}{K}) \Rightarrow x_{t+1} = ax_t(1 - X_t)$, stany stacjonarne $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a-1}{a}$, gdy $F(x) = x = ax(1-x)$, pochodna $a(1-2x) = dF(x)$ stabilność:
    * $a \in (0,1)$ $dF(x_1) = a$ – globalnie stabilny
    * $a \in (1,3)$, x_1 niestabilny, x_2 lokalnie stabilne
    * $a \in (3,4)$ – oba rozwiązania niestabilne
    * $a = 2$ trzeba wyróżnić
    * $a = 4$ – chaos (diagram bifurkacyjny – drzewo Feigenbauma, period dubling
- Modele pojedynczej populacji z uwzględnieniem wieku – macierze Lesliego
  - k grup wiekowych, N_t^i – liczebność grupy wiekowej i w chwili t
  - osobniki są jednorodne w ramach każdej grupy wiekowej
  - procesy rozrodczości i śmiertelności – jednostka czasu == jednostka zmiany wieku
  - $N_{j+1}^{t+1} = s_j N_j^t$, s_j – współczynnik starzenia (przeżywalności), $\gamma_i = 1 - s_i$ – umieralność
  - $N_0^{t+1} = \sum_{j=0}^{n} r_j N_j^t$, r_j – współczynnik urodzeń
  - $N_{t+1} = MN_t$, gdzie M to macierz Lesliego $[r_0, r_1, \ldots, r_k; s_0, \ldots, 0; \ldots; 0, \ldots, 0, s_{k-1}, 0]$
- Modele pojedynczej populacji z uwzględnieniem wieku – równanie logistyczne z opóźnieniem
  - $\dot{N}(t) = rN(t)(1 - \frac{N(t-\tau}{K}).$, $N_0 : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^+$.
  - można rozwiązywać metodą kroków
  - analiza stabilności – linearyzacja, potem szukamy rozwiązań w postaci wykładniczej ($x(t) = x_0 e^{\lambda t}$)
  - dla równań różnicowych, szukamy rozwiązań w postaci potęgowej $N_t = N_0 \lambda^t$
  - równanie charakterystyczne dla układu równań z pojedynczym opóźnieniem τ $P(\lambda + Q(\lambda)e^{-ß\tau\lambda})$.
  - funkcja pomocnicza ($F(w) = ||P(iw)||^2 - ||Q(iw)||^2$
  - badamy znak $dRe(\lambda)/d\tau$.
- Modele oddziaływań między dwiema populacjami
  - układ drapieżnik ofiara (model Lotki-Volterry), konkurencja (gatunki rywalizują o zasoby środowiska), symbioza (współżycie $\geq$2 gatunków): mutualizm (obie korzystają), komensalizm (jedna strona korzysta).
  - opis średnich zagęszczeń obu populacji
  - osobniki są rozmieszczone jednorodnie

- prawo zachowania średnich – w naturalnych siedliskach zmiany liczebności populacji w czasie zachodzą tak, że zachowana zostaje liczebność średnia
- w ekosystemie są dwa gatunki drapieżniki i ofiary
- liczba kontaktów jest proporcjonalna do liczebności obu gatunków
- $\dot{V} = rV - aVP$, $\dot{P} = -sP + abVP$ – r (współczynnik rozrodczości), a (współczynnik skutecznoścu upolowania), s (współczynnik śmiertelności), b (współczynnik upolowanej biomasy, którą gatunek drapieżników przeznacza na reprodukcję)
- gładkość prawej strony i liniowo oszacowanie pochodnej zawsze gwarantuje przedłużalność rowiązań
- znajdujemy stany stacjonarne $(V, P) = (0, 0)$, $(V, P) = (\frac{s}{ab}, \frac{r}{a})$.
- model drapieżnik-ofiara w oparciu o równanie logistyczne $\dot{V} = rV(1 - \frac{V}{K}) - aVP$, $\dot{P} = -sP + abVP$
- model z kryjówkami dla ofiar $\dot{V} = rV - a(V - K)P$, $\dot{P} = -sP + ab(V - K)P$, K – liczba ofiar, które mogą się schować przed drapieżnikiem
- model Maya – pojemność środowiska zależy od liczby ofiar $\dot{V} = r_1V(1 - \frac{V}{K_1})$, $\dot{P} = r_2P(1 - \frac{P}{K_2}V)$
- konkurencja zewnątrzgatunkowa + wewnątrzgatunkowa $\dot{N}_1 = r_1N_1(1 - \frac{N_1}{K_1} - a_{12}\frac{N_2}{K_2})$, $\dot{N}_2 = r_2N_2(1 - \frac{N_2}{K_2} - a_{21}\frac{N_1}{K_1})$ (z plusem przy a – symbioza
- model Nicholsona-Baileya (pasożyt – gospodarz)
- **Twierdzenie Poincare-Bendixona**
  $\dot{x}(t) = F(x(t), y(t))$, $\dot{y}(t) = G(x(t), y(t))$. Jeśli dla $t \geq 0$ trajektoria powyższego układu jest ograniczona, wówczas jest ona zamkniętą orbitą okresową/zbiega do zamkniętej orbity okresowej/jest stanem stacjonarnym/zbiega do stanu stacjonarnego.