WYKŁAD 1, *07.10.2010*

1. **Def.** A set N is called a **normed space** if:
   (a) N i a linear space over a given scalar field ($\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$)
   (b) there is a nonnegative functional $||\cdot|| : N \to \mathbb{R}^+$ (**norm**) such that:

   (i) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   (ii) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \ \forall x, y \in N$
   (iii) $||\lambda x|| = |\lambda|||x|| \ \forall x \in N, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

   If $||\cdot||$ fulfills (ii) and (iii), it is called **seminorm**.
   Normed space is a **metric** space, $\rho(x, y) = ||x - y||$.

2. **Def.** Normed space which is complete with respect to $\rho(\cdot, \cdot)$ is called a **Banach space**.

3. **Examples - spaces of sequences**, $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\xi_i \in \mathbb{C}$:
   - bounded sequences ($m = \{x : \sup|\xi_i| < \infty\}$, $||x|| = sup_i \xi_i$)
   - convergent sequences ($c = \{x : \lim_{i\to\infty} \xi_i$ exists $\}$, a.b.)
   - convergent to zero sequences ($c_0 = \{x : \lim_{i\to\infty} \xi_i = 0\}$, a.b.)
   - sequences of bounded variation ($vb = \{x : |xi_1| + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \xi_{i+1}| < \infty\}$, $||x|| = |\xi_1| + \sum_{i=1}^{n} |\xi_{i+1} - \xi_i|$)
   - sumable sequences ($l = l^1 = \{x : \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| < \infty\}$, $||x|| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$)
   - sumable with p-power sequences ($l^p = \{x : \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p < \infty\}$, $||x|| = (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p)^{1/p}$).

4. **Theorem** T - any set, Y - space of all functions $T \to \mathbb{C}$, $\{p_s\}_{s\in S}$ - seminorms on Y that fulfills the following conditions:
   (a) $\forall t \in T \ \exists s \in S \ \exists \lambda_t \in \mathbb{R}^+ \ \forall y \in Y \ |y(t)| \leqslant \lambda_t p_s(y)$
   (b) $\{y_n(t)\}$ is point-wise convergent to $y_0(t)$ $\forall t$ then $\forall s \in S$ $p_s(y_0) \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf p_s(y_n)$.
   Then: $p(y) = \sup_s p_s(y)$, $X = \{x \in Y : p(x) < +\infty\}$ and:

   (i) X is a linear subspace of Y
   (ii) p is a norm in X
   (iii) X with the norm p is complete.

5. **Def. Variation** of a function from an interval $x : [a, b] \to \mathbb{C}$ is the supremum of the sums $\sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})|$ over all partitions of [a,b], i.e. $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Notation: $var_{t\in[a,b]}x(t)$.

6. **Lemma** Space c is a closed subspace of m.

7. **Function spaces**:

   (a) space of continuous functions: $c(s) = \{x : S \to \mathbb{C},\ x$ - continuous$\}$. For $x \in c(s)$ $||x|| = \sup_{x\in S} |x(s)|$
   Lemma c(s) is a Banach space with the norm $|| \cdot ||$.

   (b) space of functions with bounded variation VB(a,b) (set of functions $[a, b] \to \mathbb{C}$ with finite variation)
   Lemma VB(a,b) is a Banach space with the norm given by $||x|| = |x(a)| + var_{t\in[a,b]}x(t)$.

   (c) space of functions that are integrated with p-power L^p
   Lemma $L^p(X, \mu)$ for $p \in [1, \infty)$ is a linear space and $||x|| = (\int_{\overline{X}} |x(t)|^p d\mu(t))^{\frac{1}{p}}$ is a norm.

8. **Theorem (Riesz-Fischer)** $L^p(X, \mu)$ is complete for $p \in [1, \infty)$.

9. **Def.** A function $x : X \to \mathbb{C}$ is called **essentially bounded** if there is a set P of measure zero such that $x(t)$ is bounded outside this set. I.e. there is a number a such $|x(t)| \leqslant a$ (*) except a set of measure zero; a - an essential supremum of function x (a smallest number for which (*) holds). Notation: $esssup|x(t)|$.
10. **Lemma** A space of essentially bounded functions $L^\infty(X, \mu) = \{x : ||x||_\infty = esssup|x(t)| < +\infty\}$ is a Banach space with norm $||x||_\infty$.
11. **Linear transformations** (operators) - $A : X \to Y$ such that $A(x + y) = Ax + Ay$, $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.
12. **Lemma** A linear operator A from X into Y is continuous iff. for certain M the following inequality holds: $||Ax||_Y \leqslant M||x||_X$.
13. **Def.** Infimum of all numbers M such that $||Ax|| \leqslant M||x||$ is called a **norm of A** and is denoted $|||A|||$.
14. **Lemma** If A is continuous then: $||Ax||_Y \leqslant |||A|||\ ||x||_X$ and $|||A||| = \sup_{||x||\leqslant 1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||$.
15. **Def.** $L(X, Y)$ is a set of bounded linear operators from X into Y ($A \in L(X, Y) \Rightarrow |||A||| < +\infty$) with natural algebraic addition and multiplication by scalars from a linear space.
16. **Lemma** $L(X, Y)$ with norm $|||\cdot|||$ is a normed linear space. When Y is a Banach space, $L(X, Y)$ is also a Banach space.
17. **Topology** in $L(X, Y)$:
    (a) uniform topology of $L(X, Y)$ - defined by a norm $|||\cdot|||$
    (b) topology of strong convergence - $A_n \longrightarrow^s A \Leftrightarrow \forall_{x\in X}\ ||A_n x - Ax||_Y \to 0$.

Wykład 4, *28.10.2010*

18. **Def.** $L(X, \mathbb{C}) = X^*$ - a space of linear functionals on X. X^* is called a **dual space** of X.

19. A sequence $x_n \subset X$ is **weakly convergent** to $x \Leftrightarrow x^* \in X^*$ $x^*(x_n) \to x^*(x)$. This is called a **weak topology** in X.

20. **Examples**: $(L^p)^* \supset L^q$; $(C(a,b))^* \supset VB(a,b)$.

21. **Def. Unitary space** is a linear space H with a functional $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$ such that:
    (a) $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $(x,x) \geqslant 0$
    (b) $(x,y) = \overline{(y,x)}$
    (c) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
    (d) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

22. $(\cdot,\cdot)$ **- scalar product** (inner product) $H \to \mathbb{R}$: $||x|| = \sqrt{(x,x)}$.

23. **Lemma (Schwarz inequality)** $|(x,y)| \leqslant ||x||||y||$.

24. **Lemma** $||\cdot||$ is a norm in H.

25. **Def.** A complete unitary space H is called a **Hilbert space**.

26. **Examples**
    (a) Scalar product in $\mathbb{C}^n$: $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$
    (b) $L^2(X,\mu)$: $(f,g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$ $(||f|| = (f,f)^{\frac{1}{2}} = (\int_X |f(x)^2| d\mu(x))^{\frac{1}{2}}$.

27. **Theorem (Jordan, von Neumann)** A normed space, in which the parallelogram law holds: $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$, can be made into a unitary space by defining a scalar product $(x,y) = p(x,y) - ip((ix,y)$, when $p(x,y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$.

28. **Def.** X and Y are called **orthogonal** $\Leftrightarrow (x,y) = 0$.

29. **Theorem** If W is a convex, closed subset in a Hilbert space H then for every $x \in H$ there exists exactly one $y \in W$ that $dist(x,W) = ||x-y||$ (distance from a point to a set).

30. **Theorem (Beppo-Levi)** Let L be a closed subspace in H. Then there is a space $L^\perp$ defined by expression $L^\perp = \{x \in H : (x,y) = 0 \ \forall y \in L\}$, which is an **orthogonal complement** of L i.e. $\forall x \in X$, $x = x' + x''$, where $x' \in L$, $x'' \in L^\perp$ and this representation is unique.

WYKŁAD 5, *04.11.2010*

31. **Def.** A system of vectors in a Hilbert space H, $S = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ is called an **orthonormal system** $\Leftrightarrow \delta_{\alpha\beta} = (x_\alpha, x_\beta)$ - Kronecker's delta i.e.:
    (a) $||x_\alpha|| = 1$
    (b) $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ for $\alpha \neq \beta$.
32. **Def.** An orthonormal system S is an **orthonormal basis** in H if there is no other orthonormal system T on H such that S is a proper subset of T.
33. **Theorem**
    (a) Let $S = \{x_\alpha : x \in A\}$ be an orthogonal system in H then for every $x \in H$ we have the following inequality: $\sum_{\alpha\in A} |(x, x_\alpha|^2 \leqslant ||x||^2$ - **Bessel inequality**.
    (b) The system S is a basis in H $\Leftrightarrow \sum_{\alpha\in A} |(x, x_\alpha)|^2 = ||x||^2$ - **Parseval equality**.
    (c) Under the condition (b): $x = \sum_{\alpha\in A}(x, x_\alpha)x_\alpha$.
34. **Remark** Even if A is not countable the subset of those α for which $(x, x_\alpha) \neq 0$ is at most countable.
35. **Theorem** Every Hilbert space possesses a basis.
36. **Theorem (Riesz)** Let Λ be a continuous linear functional on a Hilbert space H. Then there exists $y \in H$ such that $\forall x \in H\ \Lambda(x) = (x, y)$, y in this expression is defined uniquely.
37. **Def.** A measure ν is said to be **absolutely continuous** with respect to measure $\mu \Leftrightarrow \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.
38. **Theorem (Radon-Nikodym)** Measure ν is absolutely continuous with respect to $\mu \Leftrightarrow$ there exists a nonnegative function f such that $\nu(A) = \int_A f(x)d\mu(x)$ for every measurable set A.

Wykład 6, *18.11.2010*

39. **Example** Trigonometric monomials $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-kx}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ form an orthonormal system in $L^2(0, 2\pi)$.
Statement For every $f \in L^1(0, 2\pi)$: if $\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = 0$ for $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ then $f(t) = 0$ a.e.

40. **Example** t^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ form an orthonormal system in $L^1(a, b)$, where a, b - finite.
Statement For every $f \in L^1(a, b)$: if $\int_a^b f(t)t^k dt = 0$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ then $f(t) = 0$ a.e.

41. **Legandre polynomials** Orthogonal polynomials for different k (is not so easy) $c_k = \frac{d^k\{(b-t)(t-a)\}^k}{dt^k}$.

42. **Theorem (Hahn - Banach)** Let x^* be a linear continuous functional in a subspace L of a normed space X. Then there exists in X a functional $\tilde{x}^*$ (linear, continuous), which is an extension (prolongation) of x^*.
Properties: $\tilde{x}^*(x) = x^*(x)$ for all $x \in L$; $|||\tilde{x}^*|||_X = |||x^*|||_L$ - extension preserves the norm.

WYKŁAD 7, *25.11.2010*

43. **Theorem** Let $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$, X - normed space. Then there exists in X^* a functional x^* such that $||x^*|| = 1$, $x^*(x_0) = ||x_0||$.

44. **Theorem** Let L be a linear subspace in X (normed) and $dist(x_0, L) = d > 0$. Then there exists a functional x^* such that $x^*(x) = 0$, $x \in L$, $x^*(x_0) = 1$, $||x^*|| = 1/d$

45. **Theorem (Separating Hyperplane)** X - real normed space. Let W - a convex set with nonempty interior, V - convex set, which has empty intersection with W. Then there exists a functional x^* and a number c such that: $x^*(x) \leqslant c$, $x \in W$, $x^*(x) \geqslant c$, $x \in V$.

46. **Theorem (Banach - Steinhaus)** Let X be a Banach space and T - a family of bounded operators from X into a normed space Y. Then: $\forall x \in X \sup_{T \in T} ||Tx|| < +\infty \Leftrightarrow \sup_{T \in T} |||T||| < +\infty$.

47. **Theorem (Open Mapping)** Let T be a bounded operator from Banach space X onto Banach space Y. Then T is an open mapping.

48. **Theorem (Inverse Map)** If T is a bounded, one-to-one operator from Banach space X onto Banach space Y then T^{-1} is continuous.

49. **Def.** Let T be a mapping of a normed space X into normed space Y. A **graph of a map** T is a subset in $X \times Y$ of the form (X, T_X).

50. **Theorem** Let X, Y - Banach spaces and T - a linear map $X \to Y$. T is continuous iff. a graph of T is closed (in this cartesian product).

Wykład 8, *08.12.2010*

51. **Bounded operators** - introduction
Relations about continuity and boundness: A - is bounded, A - is continuous, A - is continuous at x_0.
$x \in X$, $x^* \in X^*$, $x^*(x) \equiv^{def.} < x, x^* >$, x^* - linear functional acting on x.

52. **Def.** Let $A \in L(X, Y)$ $(A : X \to Y)$. A **dual operator to A** is A': $^* \to X^X$ defined by the formula $< Ax, y^* > = < x, A'y^* >$.

53. **Theorem** Map $A \to A'$ is an isometric homeomorphism of $L(X, Y)$ into $L(Y^*, X^*)$.

54. **Def.** Let $A \in L(H, H)$, H - Hilbert space. And **adjoint operator to A** denoted by A^* is defined by the formula $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

55. **Theorem** Map $A \to A^*$ hast the following properties:
    (i) is a semilinear isometric isomorphism of $L(H, H)$ into itself (semilinearity: $\alpha A + \beta B \to \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$)
    (ii) $(AB)^* = B^* A^*$
    (iii) $(A^*)^* = A$
    (iv) $||A^* A|| = ||A^2||$

56. **Def.** $A \in L(H)$ is called a **self adjoint operator**, if $A = A^*$. $P \in L(H)$ is called a **projection** if $P^2 = P$ and an **orthogonal projection** if in addition $P = P^*$.

57. **Def. (spectrum of a bounded operator)** Let $A \in L(X)$.
A number $\lambda \in \mathbb{C}$ belongs to a resolvent set of opeartor A, denoted by $\rho(A)$, if $(\lambda I - A)$ possesses a bounded inverse operator $(\lambda I - A)^{-1}$. Then $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ is called a **resolvent operator (resolvent)** of A.
If $\lambda \notin \rho(A)$ we say that λ **belongs to the spectrum of** A (denoted by $\sigma(A)$).
The spectrum can be divided into the following disjoint subsets:
    - $P_\sigma(A) = \{\lambda \in \sigma(A)$: there is no inverse to $(\lambda I - A)\}$ - **point spectrum**
    - $C_\sigma(A) = \{\lambda \in \sigma(A)$: $(\lambda I - A)^{-1}$ exists but is not bounded and $\overline{\lambda I - A)X} = X\}$ - **continuous spectrum**
    - $R_\sigma(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda I - A)^{-1}$ existst but $\overline{\lambda I - A)X} \neq X\}$ - **residual spectrum**

58. **Theorem** Let $A \in L(X)$. Then $\rho(A)$ is an open set and $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ is a holomorphic function in every component of $\rho(A)$.

59. **Theorem (First resolvent equation)** $\lambda, \mu \in \rho(A)$ $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\lambda(A) R_\mu(A)$.

Wykład 9, *15.12.2010*

60. **Theorem** A - self adjoint, bounded operator in a Hilbert space. Then:
    (i) spectrum is real
    (ii) residual spectrum is empty
    (iii) eigenvectors corresponding to different eigevalues are orthogonal.

61. **Def.** A sequence $\{x_n\}$ in X is called **weakly convergent** if $\forall x^* \in X^*$ a number sequence $x^*(x_n)$ is convergent. Notation: $x = w - \lim x_n$, $x_n \to^w$, $x_n \rightharpoonup x$

62. **Def.** Let A be a bounded operator. A is called a **compact operator** if:
    (i) A maps bounded sets into precompact sets
    (ii) A maps weakly convergent sequences into strongly onvergent sequences.

63. **Lemma** Unit sphere in a Hilbert space is **sequentially weakly compact** i.e. from every sequence $\{x_n\}$ $||x_n|| \leqslant 1$, we can choose a weakly convergent subsequence.

64. **Theorem** (i) is equivalent with (ii) (from Def. 61).

65. **Integral Operators:** Ω - compact set in $\mathbb{R}^n$, $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $y(t) = \int_\Omega K(t,s)x(s)ds$, $K(t,s)$ - kernel of this integral operator, continuous (assumptions of Arzeli-Ascoli theorem are fulfilled).

66. **Theorem** A - selfadjoint, compact operator (in a Hilbert space). Then in $RanA$ there exists a basis $\{x_n\}$ such that $Ax_n = \lambda_n x_n$ and $\lambda_n \to 0$.

WYKŁAD 10, *13.01.2011*

67. **Theorem** Let x^* be a continuous, linear functional on C. Then there exists a unique $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in l^1$ such that $x^*(x) = y_1 x_\infty + \sum_{i=2}^{\infty} y_i x_{i-1}$, where $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$.

68. **Corollary** Operator $(Ay)(x) = y_1 x_\infty + \sum_{i=2}^{\infty} y_i x_{i-1}$ is a linear isometry of l^* and C^*.

69. **Theorem** $(c_0)^* = l^1_\infty$. $x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, where $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in c_0$, $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in l^1$.

70. **Theorem** $(l^p)^* = l^q$, where $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$.

71. **Theorem** $(l^1)^* = m$.

72. **Lemma** Let the measure μ be σ-finite. If for a measurable function $y(t)$ such that $\int_T x(t)y(t)d\mu(t) < +\infty$ for every $x \in L^p(T, \mu)$, then $y \in L^q(T, \mu)$.

WYKŁAD 11, *13.01.2011*

73. **Theorem** Let x^* be a continuous linear functional on $L^p(T, \mu)$, $1 < p < \infty$. Then there exists a unique $y \in L^q(T, \mu)$ such that $x^*(x) = \int_T y(t)x(t)d\mu(t)$, $x \in L^p(T, \mu)$. In addition $||x^*||_{(L^p)^*} = ||y||_L$.
$((L^p)^* = L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

74. **Theorem** Let μ be a σ-finite measure. Then $L^\infty(T, \mu) = (L^1)^*(T, \mu)$.

1. **TWIERDZENIE BANACHA-STEINHAUSA**

Założenia

- X – przestrzeń Banacha
- T – rodzina ograniczonych operatorów z X w unormowaną przestrzeń Y

Teza $\forall x \in X$ $\sup_{T \in \mathbb{T}} ||Tx|| < +\infty \iff \sup_{T \in \mathbb{T}} |||T||| < +\infty$.

Dowód
$\Leftarrow$ – jasne, bo $\infty > \sup_{T \in \mathbb{T}} |||T||| = \sup_{T \in \mathbb{T}} \sup_{x \in X} ||Tx|| \geqslant \sup_{T \in \mathbb{T}} ||Tx||$ $\forall x \in X$.

$\Rightarrow$

- Definiujemy zbiór $B_n = \bigcap_{T \in \mathbb{T}} \{x : ||Tx|| \leqslant n\}$. Jest on domknięty (bo jest przecięciem zbiorów domkniętych; bo $x \longrightarrow ||Tx||$ jest ciągłe, więc każdy z tych zbiorów jest domknięty w X jako przeciwobraz przedziału domkniętego $[0, n]$). $X = \bigcup_n B_n$ (@).
- Z twierdzenia Baire'a (możemy z niego skorzystać, bo (@) i X jest przestrzenią metryczną zupełną) istnieje B_n, które ma niepuste wnętrze. Zatem istnieje zbiór $\{x : |x - x_0| < \varepsilon\} \subset B_n$ – kula o środku w x_0 i promieniu ε zawarta w B_n.
- Weźmy x taki że $\frac{\varepsilon}{2} < ||x|| < \varepsilon$ $(*)$. Zastosujmy T do X i popatrzmy na normę:
$||Tx|| = ||T(x - x_0 + x_0)|| \leqslant ||T(x - x_0)|| + ||T(x_0)|| \leqslant 2n$
(bo $(x - x_0)$ i x_0 są w B_n).
- Z $(*)$ $\frac{||x||}{\varepsilon/2} > 1$, mamy:
$||Tx|| \leqslant 2n \leqslant \frac{2n}{\varepsilon/2}||x|| = \frac{4n}{\varepsilon}||x||$, $\frac{4n}{\varepsilon}$ - górna granica normy $||T||$.
- Wszystko działa dla dowolnego T.

2. TWIERDZENIE HAHNA-BANACHA

Założenia

- x^* – liniowy, ciągły funkcjonał w podprzestrzeni L unormowanej przestrzeni X

Teza Istnieje w X funkcjonał (liniowy, ciągły) $\tilde{x}^*$, który jest rozszerzeniem (przedłużeniem) x^*: $\tilde{x}^*(x) = x^*(x)$ dla wszystkich $x \in L$ oraz przedłużenie to zachowuje normę $|||\tilde{x}^*|||_X = |||x^*|||_L$.

Dowód

I X – przestrzeń rzeczywista

- Weźmy $x_1 \in X$ i dokonajmy następującej (jednoznacznej – łatwo pokazać) dekompozycji: $x_1 = x + \alpha z$, gdzie $x \in L$, $z \notin L$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas $\tilde{x}^*(x_1) = x^*(x) + \alpha\tilde{x}^*(z)$.
- Weźmy teraz dowolne x', $x'' \in L$, wówczas $x^*(x') - x^*(x'') = x^*(x' - x'') \leqslant ||x^*||||x' - x''|| = ||x^*||||x' + z - (x'' + z|| \leqslant ||x^*||||x' + z|| + ||x^*||||x'' + z||$
  dostajemy zatem: $-x^*(x'') - ||x^*||||x'' + z|| \leqslant -x^*(x') + ||x^*||||x' + z||$
  $\sup_{x \in L} -x^*(x) - ||x^*||||x + z|| \leqslant a \leqslant \inf_{x \in L} -x^*(x) + ||x^*||||x + z||$ $(*)$.
- Wybierzmy $a = \tilde{x}^*(z) \in \mathbb{R}$ – czy to jest dobry wybór? Czy $|\tilde{x}^*(z)| \leqslant ||x^*||||x + \alpha z||$? Mamy dwa przypadki:
  $\alpha = 0$: $x_1 = x + \alpha z$, jasne z definicji funcjonału x^* (bo $x \in L$)
  $\alpha \neq 0$: $|\tilde{x}^*(x_1)| = |x^*(x) + \alpha a| \leqslant |\alpha||x^*(\frac{x}{\alpha} + a| \leqslant |\alpha|||x^*||||\frac{x}{\alpha} + z|| = ||x^*||||x + \alpha z||$ (na mocy $(*)$).
- Z powyższego mamy $||\tilde{x}^*(z)|| \leqslant ||x^*||$, w drugą stronę nierówność jest jasna (bo $\tilde{x}^*$ jest rozszerzeniem normy, na większej przestrzeni norma może być tylko większa), zatem mamy $||\tilde{x}^*|| = ||x^*||$.
- Dowiedliśmy zatem, że jeżeli X jest przestrzenią rzeczywistą, to każdy funkcjonał liniowy ograniczony x^* o dziedzinie $L \in X$, $L \neq X$, da się rozszerzyć bez zmiany normy na podprzestrzeń $lin(L \cup z)$, gdzie $z \in X$ jest danym punktem.

II X – przestrzeń zespolona

- Zauważmy, że każda przestrzeń zespolona może być również uważana za rzeczywistą (jeżeli ograniczymy się do mnożenia jej elementów przez liczby rzeczywiste) i że część rzeczywista Rex^* i urojona Imx^* funkcjonału liniowego ograniczonego x^* są funkcjonałami liniowymi ograniczonymi na tej przestrzeni rzeczywistej.

- $x^*(x) = Rex^*(x) + iImx^*(x) = Rex^*(x) + iRe^*(-ix)$ (@). $x^*(x)$ jest zdefiniowany tylko na L i chcemy rozszerzyć go na X. $Rex^*(x)$ ma rozszerzenie, które nazwijmy $\lambda(x)$.
- Funkcjonał rzeczywisty Rex^* da się rozszerzyć bez zmiany normy na podprzestrzeń rzeczywistą $L = lin(L \cup z)$, a następnie na podprzestrzeń rzeczywistą $lin(L \cup iz)$. W rezultacie otrzymujemy funkcjonał liniowy rzeczywisty λ określony na podprzestrzeni zespolonej $lin(L \cup z)$. Przyjmijmy na tej podprzestrzeni $\tilde{x}^*(x) = \lambda(x) - i\lambda(ix)$. Z (@) wynika, że $\tilde{x}^*$ jest rozszerzeniem funkcjonału $x^*(x)$.
- Widać, że $\tilde{x}^*(x)$ jest funkcjonałem addytywnym i jednorodnym względem mnożenia przez liczby rzeczywiste. Aby udowodnić jego jednorodność względem mnożenia przez liczby zespolone wystarczy zauważyć, że:
  $\tilde{x}^*(x) = \lambda(x) - i\lambda(ix)$ – nad $\mathbb{R}$, liniowy funkcjonał
  $\tilde{x}^*(ix) = \lambda(ix) - i\lambda(-x) = i\lambda(x) + \lambda(ix) = i\tilde{x}^*(x)$.
  Zatem jest to rzeczywiście zespolony funkcjonał ($||Rex^*|| \leqslant ||x^*||$).
- Musimy pokazać, że ten funkcjonał zachowuje normę, tzn. że $||\tilde{x}^*|| = ||x^*||$. Dobierzmy dla danego punktu $x \in D(\tilde{x}^*)$ liczbą rzeczywistą θ tak, aby $e^{-i\theta}\tilde{x}^*(x) \geqslant 0$ ($\theta := Arg\tilde{x}^*(x)$). Wtedy
  $|\tilde{x}^*(x)| = |e^{-i\theta}\tilde{x}^*(x)| = |\tilde{x}^*(e^{-i\theta}x)| = \lambda(e^{-i\theta}x) \leqslant ||\lambda||||e^{-i\theta}x|| = ||\lambda||||x|| \leqslant ||x^*||||x||$ (bo udowodniliśmy, że $||\lambda|| = ||Rex^*|| \leqslant ||x^*||$).
- Wobec dowolności punktu x wynika stąd, że $||\tilde{x}^*|| \leqslant ||x^*||$, nierówność w drugą stronę jest oczywista ($\tilde{x}^*(x) = x^*(x)$ dla $x \in L$), czyli mamy $||\tilde{x}^*|| = ||x^*||$. Funkcjonał $\tilde{x}^*$ jest więc żadanym rozszerzeniem funkcjonału x^*.

III Lemat Kuratowskiego-Zorna

- Rozważmy zbiór złożony z wszystkich funkcjonałów liniowych ograniczonych $\tilde{x}^*$ będących rozszerzeniami funkcjonału x^* i takich, że $||\tilde{x}^*|| = ||x||$. Zbiór taki (nazijmy go E) można częściowo uporządkować, przyjmując, że $L_i \oplus \{z_{i+1}\} = (L_{i+1}, \tilde{x}^*_{i+1})$, $(L_i, \tilde{x}^*_i) \prec (L_{i+1}, \tilde{x}^*_{i+1})$.
- Łatwo zauważyć, że każdy liniowo uporządkowany podzbiór E_0 zbioru E jest ograniczony z góry, mianowicie:
  $e_\alpha = (L_\alpha, \tilde{x}^*_\alpha)$ definiuje przestrzeń i funkcjonał, $\{e_\alpha\}$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym. Funkcjonał $\tilde{x}^*$ określony na sumie wszystkich zbiorów L_α, tzn. $(\bigcup_\alpha L_\alpha, \tilde{x}^*)$, zdefiniowany następująco $\tilde{x}^*(x_\alpha) = x^*_\alpha(x_\alpha)$, gdzie $x_\alpha \in L_\alpha$ jest elementem maksymalnym.
- Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w zbiorze E wszystkich rozważanych rozszerzeń funkcjonału x^* istnieje element maksymalny. Jest nim funkcjonał $\tilde{x}^*$ określony na całej przestrzeni X (wpp. miałby on dalsze rozszerzenie, wbrew definicji elementu maksymalnego).

3. **TWIERDZENIE RIESZA**

Założenia

- Λ – ciągły, liniowy funkcjonał na przestrzeni Hilberta H

Teza Istnieje $y \in H$, zdefiniowany jednoznacznie, taki że $\Lambda(x) = (x, y)$ $\forall x \in H$.

Dowód

- Niech $L = \{x : \Lambda(x) = 0\}$ – domknięta przestrzeń. Ponieważ funkcjonał $L^\perp \oplus L = H$ ($L^\perp$ – uzupełnienie ortogonalne).
- Weźmy $z \in L^\perp$ takie że $||z|| = 1$, istnieje następująca jednoznaczna dekompozycja $x \in H$: $x = Px + (x, z)z$ (gdzie P jest rzutem na L).
- Zastosujmy funkcjonał Λ do x: $\Lambda(x) = \Lambda(Px) + \Lambda((x, z)z) = 0 + (x, z)\Lambda(z) = (x, \overline{\Lambda(z)}z)$.
- Niech $y := \overline{\Lambda(z)}z$, ponieważ powyższa dekompozycja była jednoznaczna, więc y jest jednoznaczne.

4. **TWIERDZENIE O ODWZOROWANIU OTWARTYM**

Założenia

- T – ograniczony operator z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y

Teza T jest odwzorowaniem otwartym (tzn. obraz $T(A)$ dowolnego zbioru otwartego A w X jest zbiorem otwartm w Y).

Dowód

- Chcemy pokazać, że obraz każdego otwartego zbioru w X jest otwartym zbiorem w Y. Weźmy sferę $K_r^X = \{x \in X : ||x|| < r\}$ - sfera o promieniu r i środku w x.
- Czy istnieje taka η, że $K_\eta^Y \subset T(K_r^X)$ (@)? Zauważmy, że możemy rozważać tylko sfery o $r = 1$, gdyż $T(K_r^X) = rT(K_1^X)$ (T – liniowy operator).
- $Y = \cup_n \overline{T(K_n^X)}$)(∗), bo nasze odwzorowanie T jest na Y (i $\forall y \in Y$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, że $y \in T(K_n^X)$), aby mieć pewność, że są domknięte (i móc skorzystać z tw. Baire'a) – domykamy zbiory. Pokażemy najpierw, że $\overline{T(K_n^X)}$ obrazu dowolnego otoczenia zera K_n^X zawiera pewne otoczenie zera przestrzeni Y.
- Wobec założonej zupełności przestrzeni Y na mocy tw. Baire'a na pewno istnieje wśród nich zbiór o niepustym wnętrzu. Niech $\overline{T(K_N^X)}$ ma punkty wewnętrzne (zawiera sferę). Domknięcie z (∗) jest problemem, bo teraz mamy $K_\eta^Y \subset \overline{T(K_N^X)}$, a chcemy mieć $K_\eta^Y \subset T(K_N^X)$.
- Rozważmy $y \in K_\eta^Y \subset \overline{T(K_\eta^Y)} \subset \overline{T(K_1^X)}$. Czy $\overline{T(K_1^X)} \subset T(K_2^X)$?
- Weźmy $x_1 \in K_1^X$ takie że $y - T(x_1) \in K_{\eta/2}^Y \subset \overline{T(K_{1/2}^X)}$ (z liniowości). Teraz bierzemy $x_2 \in K_{1/2}^X$ takie że $y - T(x_1) - T(x_2) \in K_{\eta/4}^Y \subset \overline{T(K_{1/4}^X)}$. Granicą tych działań jest 0. Zatem $y = T(\sum_i x_i) \subset T(K_2^X)$.
- Mamy teraz (@) – obraz sfery zawiera sferę. Musimy teraz udowodnić, że ten obraz jest zbiorem otwartym. Niech P – zbiór otwarty w X, $y_0 \in T(P)$. Oznacza to, że istnieje $x_0 \in P$ takie że $y_0 = T(x_0)$. Wiemy, że $x_0 \in K_\varepsilon^X \subset P$ – bo P jest otwarty. Mamy:

$$\begin{array}{ccccc} T(x_0) & + & T(K_\varepsilon^X) & & \\ y_0 & + & K_\eta^Y & \subset T(P) \end{array}$$

  Zatem $T(P)$ jest zbiorem otwartym (każdy punkt Tx leży w $T(P)$ wraz z pewnym swoim otwartym otoczeniem).

5. **TWIERDZENIE O ODWZOROWANIU ODWORTNYM**

Założenia

- T – ograniczony, wzajemnie jednoznaczny (1-1) operator z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y

Teza T^{-1} jest ciągły.

Dowód

- T^{-1} istnieje (ponieważ T jest 1-1).
- Wszystkie założenia tw. o odwzorowaniu otwartym są spełnione, zatem T jest odwzorowaniem otwartym, a to oznacza ciągłość odwzorowania T^{-1} (bo $T = (T^{-1})^{-1}$ przekształca zbiory otwarte na zbiory otwarte / domknięte na domknięte, a tak się dzieje tylko wtedy, gdy T jest ciągłe).

6. **TWIERDZENIE O WYKRESIE DOMKNIĘTYM**

Założenia

- X, Y – przestrzenie Banacha
- T – liniowe przekształcenie $X \longrightarrow Y$

Teza T jest ciągłe $\Longleftrightarrow$ wykres T jest domknięty w $(X \times Y)$.

Dowód
$\Rightarrow$ – jasne

$\Leftarrow$

- Umieszamy wykres w przestrzeni Banacha $X \times Y$ z normą $||(x, Tx)||_{X \times Y} = ||x||_X + ||Tx||_Y$. (Wykres $W_T = \{(x, Tx) : x \in X\}$ odwzorowania T jest domkniętą podprzestrzenią liniowąą, W_T jest zatem przestrzenią Banacha.
- Definiujemy dwa rzuty (rzuty w produkcie kartezjańskim są zawsze ciągłe): $P_1 : (x, Tx) \to x$, $P_2 : (x, Tx) \to Tx$.
- P_1 jest wzajemnie jednoznaczne (1-1 – różnowartościowe i na; liniowe i ciągłe), więc jest otwarte, zatem P_1^{-1} jest ciągłe (patrz tw. o odwzorowaniu odwrotnym).
- $T = P_2 P_1^{-1}$ – dekompozycja na iloczyn dwóch ciągłych przekształceń, więc T też jest ciągłe.